

第 8 章参数估计习题解答

一. 选择题

1. 当样本量一定时, 置信区间的长度(D).
 - A. 随着 α 的提高而变长.
 - B. 随着置信水平 $1 - \alpha$ 的降低而变长.
 - C. 与置信水平 $1 - \alpha$ 无关.
 - D. 随着置信水平 $1 - \alpha$ 的降低而变短.
2. 置信水平 $1 - \alpha$ 表达了置信区间的(D).
 - A. 准确性.
 - B. 精确性.
 - C. 显著性.
 - D. 可靠性.
3. 设 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 是参数 θ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的区间估计, 则以下结论正确的是(C).
 - A. 参数 θ 落在区间 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 之内的概率为 $1 - \alpha$.
 - B. 参数 θ 落在区间 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 之外的概率为 α .
 - C. 区间 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 包含参数 θ 的概率为 $1 - \alpha$.
 - D. 对不同的样本观测值, 区间 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 的长度相同.
4. 通过矩估计法求出的参数估计量(C).
 - A. 是唯一的.
 - B. 是无偏估计量.
 - C. 不一定唯一.
 - D. 不唯一, 但是无偏估计.
5. 若似然函数存在, 则下列命题错误的是(D).
 - A. 最大似然估计可能不唯一.
 - B. 最大似然估计不一定是无偏估计.
 - C. 最大似然估计一定存在.
 - D. 似然函数是样本 x_1, x_2, \dots, x_n 的函数.
6. 设总体 X 服从 $[0, \theta]$ 上的均匀分布, X_1, X_2, \dots, X_n 为样本, 记 \bar{X} 为样本均值, 则下列统计量不是 θ 的矩估计量的是(A).

$$A. \hat{\theta}_1 = \frac{1}{2} \bar{X}. \quad B. \hat{\theta}_2 = \sqrt{\frac{12}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}.$$

$$C. \hat{\theta}_3 = \sqrt{\frac{3}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2}. \quad D. \hat{\theta}_4 = 2\bar{X}.$$

$$7. \text{ 设总体 } X \text{ 的密度函数为 } P(x, \theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}, \theta > 0, (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

为样本, 记 $A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k, k=1,2,3$, 则以下结论中错误的是(A).

$$A. A_1 \text{ 是 } \theta \text{ 的矩估计量}. \quad B. \frac{A_1}{1-A_1} \text{ 是 } \theta \text{ 的矩估计量}.$$

$$C. \frac{2A_2}{1-A_2} \text{ 是 } \theta \text{ 的矩估计量}. \quad D. \frac{3A_3}{1-A_3} \text{ 是 } \theta \text{ 的矩估计量}.$$

8. 样本 (X_1, X_2, \dots, X_n) 取自总体 X , $\mu = E(X)$, $\sigma^2 = D(X)$, 则以下结论不成立的是(D).

$$A. X_i (1 \leq i \leq n) \text{ 均是 } \mu \text{ 的无偏估计}. \quad B. \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ 是 } \mu \text{ 的无偏估计}.$$

$$C. \frac{1}{2}(X_1 + X_2) \text{ 是 } \mu \text{ 的无偏估计}. \quad D. \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n X_i \text{ 是 } \mu \text{ 的无偏估计}.$$

9. 样本 X_1, X_2, \dots, X_n 来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$, 则总体方差 σ^2 的无偏估计为(A).

$$A. S_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2. \quad B. S_2^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

$$C. S_3^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2. \quad D. S_4^2 = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

10. 容量为 $n=1$ 的样本 X_1 来自总体 $X \sim B(1, p)$, 其中参数 $0 < p < 1$, 则下述结论正确的是(A).

- A. X_1 是 p 的无偏估计量. B. X_1 是 p 的有偏估计量.
C. X_1^2 是 p^2 的无偏估计量. D. X_1^2 是 p 的有偏估计量.

11. 设 X_1, X_2 是来自正态总体 $N(\mu, 1)$ 的样本, 则对统计量 $\hat{\mu}_1 = \frac{2}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2$,
 $\hat{\mu}_2 = \frac{1}{4}X_1 + \frac{3}{4}X_2$, $\hat{\mu}_3 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2$, 以下结论中错误的是(B).

- A. $\hat{\mu}_1$, $\hat{\mu}_2$, $\hat{\mu}_3$ 都是 μ 的无偏估计量. B. $\hat{\mu}_1$, $\hat{\mu}_2$, $\hat{\mu}_3$ 都是 μ 的一致估计量.
C. $\hat{\mu}_3$ 比 $\hat{\mu}_1$, $\hat{\mu}_2$ 更有效. D. $\frac{1}{2}(\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2)$ 不比 $\hat{\mu}_3$ 更有效.

12. 现有容量为 $n=25$ 的样本来自总体 X , 若 $\bar{X}=2$, $D(X)=4$, 已知标准正态分布的分布函数 $\Phi(x)$ 的函数值: $\Phi(1.645)=0.95$, $\Phi(1.96)=0.975$, $\Phi(1.282)=0.90$. 则在显著水平 $\alpha=0.05$, $E(X)$ 的置信区间为(A).

- A. (1.216, 2.784) . B. (1.342, 2.658) .
C. (1.4872, 2.5128) . D. $(2 - \frac{2 \times 1.96}{25}, 2 + \frac{2 \times 1.96}{25})$.

13. 设 (X_1, X_2, \dots, X_n) 是正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, 统计量 $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ 服从 $N(0, 1)$, 又知 $\sigma^2 = 0.64$, $n=16$, 及样本均值 \bar{X} , 利用 Z 对 μ 作区间估计, 若已指定置信水平 $1-\alpha$, 并查得为 $z_{\alpha/2}=1.96$, 则 μ 的置信区间为(C).

- A. $(\bar{X}, \bar{X} + 0.396)$. B. $(\bar{X} - 0.196, \bar{X} + 0.196)$.

C. $(\bar{X} - 0.392, \bar{X} + 0.392)$. D. $(\bar{X} - 0.784, \bar{X} + 0.784)$.

二. 填空题

14. 设 θ 和 X_1, X_2, \dots, X_n 是总体 X 的未知参数及样本, θ_1 和 θ_2 是由样本确定的两个统计量, 满足 $P(\theta_1 < \theta < \theta_2) = 1 - \alpha$, 则称随机区间 (θ_1, θ_2) 为 θ 的置信区间, 其置信水平为 $1 - \alpha$.

15. 通常用的三条评选估计量的标准是 无偏性, 有效性, 一致性 .

16. 设某种元件的寿命 $X: N(\mu, \sigma^2)$, 其中参数 μ, σ^2 未知, 为估计平均寿命 μ 及方差 σ^2 , 随机抽取 7 只元件得寿命为(单位: 小时): 1575, 1503, 1346, 1630, 1575, 1453, 1950. 则 μ 的矩估计为 $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x} = 1576$, σ^2 的矩估计为

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 30878.85714$$

17. 样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 是总体 $X: N(\mu, \sigma^2)$ 中 σ^2 的 无

($E(S^2) = \sigma^2$) 偏估计, $S_*^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 是 σ^2 的 有 ($E(S_*^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$) 偏估计.

18. 设总体 $X: N(\mu, 1)$, μ 是未知参数, X_1, X_2 是样本, 则 $\hat{\mu}_1 = \frac{2}{3} X_1 + \frac{1}{3} X_2$ 及 $\hat{\mu}_2 = \frac{1}{2} X_1 + \frac{1}{2} X_2$ 都是 μ 的无偏估计, 但 $\hat{\mu}_2$ 比 $\hat{\mu}_1$ 有效.

19. X_1 是总体 X 中抽得的容量 $n=1$ 的样本, 当 X 服从 $[0, \theta]$ 上均匀分布时, X_1 是未知参数 θ 的 有偏 ($E(X_1) = \frac{\theta}{2} \neq \theta$) 估计, 当 $X \sim N(\theta, \sigma^2)$ 时, X_1 是未知参数 θ 的 无偏 ($E(X_1) = \theta$) 估计.

20. 设 (X_1, X_2) 是取自正态总体 $X \sim N(\mu, 1)$ 的一个样本, 则易证 $\hat{\mu} = \alpha X_1 + \beta X_2$,

(其中 $\alpha + \beta = 1$) 是 μ 的无偏估计量, 且当 $\alpha = \underline{1/2}$ 时 $\hat{\mu}$ 是 μ 的最小方差估计量, 最小方差为 $1/2$.

21. 设总体 $X \sim B(1, p)$, 其中未知参数 $0 < p < 1$, (X_1, X_2, \dots, X_n) 是 X 的样本, 则 p 的矩估计为 $\hat{p} = \bar{X}$, 样本似然函数为

$$L(p) = \prod_{i=1}^n (C_1^{x_i} p^{x_i} (1-p)^{1-x_i}) = (\prod_{i=1}^n C_1^{x_i}) p^{\sum x_i} (1-p)^{\sum (1-x_i)}.$$

22. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, 则有关于 μ 及 σ^2 的似然函数 $L(\mu, \sigma^2) = \underline{\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}}$.

23. 设 (X_1, X_2, \dots, X_n) 是抽自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的随机样本, a, b 为常数, 且 $0 < a < b$, 则随机区间 $\left(\sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu)^2}{b}, \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu)^2}{a} \right)$ 的长度的数学期望为 $\frac{n\sigma^2}{a} - \frac{n\sigma^2}{b}$.

24. 从某超市的货架上随机的抽得 9 包 0.5kg 装的食糖, 计算得食糖的平均重量为 $\bar{x} = 0.5089$ kg. 从长期的实践中知道, 该品牌的食糖重量服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 已知 $\sigma^2 = 0.01^2$, 则 μ 的 95% 的置信区间为 $(0.5023, 0.5154)$. (已知 $Z_{0.025} = 1.96$)

25. 设 A 和 B 两批导线是用不同的工艺生产的, 今随机地从每批导线中抽取 5 根测量电阻, 算得 $S_A^2 = 1.07 \times 10^{-7}$, $S_B^2 = 5.3 \times 10^{-7}$, 若 A 批导线的电阻服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, A 批导线的电阻服从正态分布 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 则 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信度为 0.9 的置信区间为 $(0.032, 1.29)$. (已知 $F_{0.05}(4, 4) = 6.39$, $F_{0.95}(4, 4) = 0.1565$)

三. 应用计算题

26. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自二项分布 $B(m, p)$ 总体的一个样本, x_1, x_2, \dots, x_n 为其样本观测值, 其中 m 是正整数且已知, p ($0 < p < 1$) 是未知参数. (1) 求未知参数 p 的矩估计;

(2) 求未知参数 p 的最大似然估计.

解:(1) 矩估计 $E(X) = mp$, $m\hat{p} = \bar{X}$, 得矩估计 $\hat{p} = \frac{\bar{X}}{m}$

$$(2) P(X=x) = C_m^x p^x (1-p)^{m-x}, x=0,1$$

所以样本似然函数

$$L(p) = \prod_{i=1}^n (C_m^{x_i} p^{x_i} (1-p)^{m-x_i}) = (\prod_{i=1}^n C_m^{x_i}) p^{\sum x_i} (1-p)^{\sum (m-x_i)}$$

两边取对数

$$\ln L(p) = \sum_{i=1}^n \ln(C_m^{x_i}) + \sum_{i=1}^n x_i \ln p + \sum_{i=1}^n (m-x_i) \ln(1-p)$$

$$\text{求导 } \frac{d \ln L(p)}{dp} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{p} - \frac{\sum_{i=1}^n (m-x_i)}{1-p}, \text{ 由 } \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\tilde{p}} - \frac{\sum_{i=1}^n (m-x_i)}{1-\tilde{p}} = 0 \text{ 得}$$

$$p \text{ 最大似然估计为 } \tilde{p} = \frac{\bar{x}}{m}.$$

$$27. \text{ 设总体 } X \text{ 的概率密度函数为 } p(x, \theta) = \begin{cases} (\theta+1)x^\theta, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \text{ 其中 } \theta \text{ 未知,}$$

X_1, X_2, \dots, X_n 是来自该总体的一个样本, x_1, x_2, \dots, x_n 为其样本观测值. (1) 求未知参数 θ 的矩估计值; (2) 求未知参数 θ 的最大似然估计值.

$$\text{解:(1) } E(X) = \int_0^1 x(\theta+1)x^\theta dx = \frac{\theta+1}{\theta+2}, \frac{\hat{\theta}+1}{\hat{\theta}+2} = \bar{X}, \text{ 得矩估计 } \hat{\theta} = \frac{1-2\bar{X}}{\bar{X}-1};$$

$$(2) X \text{ 的概率密度为: } p(x, \theta) = \begin{cases} (\theta+1)x^\theta, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

所以样本似然函数

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n [(\theta+1)x_i^\theta] = (\theta+1)^n (\prod_{i=1}^n x_i)^\theta$$

两边取对数

$$\ln L(\theta) = n \ln(\theta+1) + \theta \sum_{i=1}^n \ln x_i$$

$$\text{求导 } \frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{\theta+1} + \sum_{i=1}^n \ln x_i, \text{ 由 } \frac{n}{\hat{\theta}+1} + \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0 \text{ 得}$$

$$\theta \text{ 最大似然估计为 } \tilde{\theta} = -1 - \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i}.$$

$$28. \text{ 设总体 } X \text{ 的概率密度函数为 } p(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & \theta \leq x \leq 2\theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \text{ 其中 } \theta > 0, \text{ 且 } \theta \text{ 未知, 求}$$

未知参数 θ 的最大似然估计值.

$$\text{解: } X \text{ 的概率密度为 } p(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & \theta \leq x \leq 2\theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

所以样本似然函数

$$L(\theta) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{\theta}\right), & \theta < x_i < 2\theta, \forall i \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} \left(\frac{1}{\theta}\right)^n, & \theta < x_i < 2\theta, \forall i \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

最大似然估计的原理是找到一个 θ , 使得似然函数达到最大.

在本题中, 就需要在满足条件的范围内 ($\theta < x_i < 2\theta, \forall i$ $0 < x_i < 1, \forall i$) 找到一个最小的 θ , 从而使似然函数达到最大.

$$\text{因此 } \theta \text{ 最大似然估计为 } \hat{\theta} = \frac{1}{2} \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i\}.$$

29. 设 X_1, X_2, X_3 是来自总体 X 的样本, μ 和 σ^2 分别是总体均值和总体方差, 证明下列三个统计量

$$\hat{\mu}_1 = \frac{2}{5}X_1 + \frac{2}{5}X_2 + \frac{1}{5}X_3, \quad \hat{\mu}_2 = \frac{1}{6}X_1 + \frac{1}{2}X_2 + \frac{1}{3}X_3, \quad \hat{\mu}_3 = \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{3}X_3,$$

都是总体均值 μ 的无偏估计量; 并指出它们中哪个估计量最有效.

$$\text{解: 因为 } E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = \mu, \quad D(X_1) = D(X_2) = D(X_3) = \sigma^2,$$

$$E(\hat{\mu}_1) = \frac{2}{5}E(X_1) + \frac{2}{5}E(X_2) + \frac{1}{5}E(X_3) = \mu,$$

$$E(\hat{\mu}_2) = \frac{1}{6}E(X_1) + \frac{1}{2}E(X_2) + \frac{1}{3}E(X_3) = \mu,$$

$$E(\hat{\mu}_3) = \frac{1}{3}E(X_1) + \frac{1}{3}E(X_2) + \frac{1}{3}E(X_3) = \mu, \text{ 所以 } \hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3 \text{ 都为 } \mu \text{ 的无偏估计量;}$$

$$\text{又因为 } D(\hat{\mu}_1) = \frac{4}{25}D(X_1) + \frac{4}{25}D(X_2) + \frac{1}{25}D(X_3) = \frac{9\sigma^2}{25},$$

$$D(\hat{\mu}_2) = \frac{1}{36}D(X_1) + \frac{1}{4}D(X_2) + \frac{1}{9}D(X_3) = \frac{7}{18}\sigma^2$$

$$D(\hat{\mu}_3) = \frac{1}{9}D(X_1) + \frac{1}{9}D(X_2) + \frac{1}{9}D(X_3) = \frac{1}{3}\sigma^2, \text{ 可得 } D(\hat{\mu}_2) > D(\hat{\mu}_1) > D(\hat{\mu}_3),$$

所以 $\hat{\mu}_3$ 最有效.

30. 假设你为某种子子公司开发一种快速生长的洋葱新品种. 现拟确定该品种洋葱从播种到成熟 (可从外观上判断球茎发育, 顶端弯曲等) 所需的平均时间 μ (天数). 假定从初步的研究知道, 平均时间服从 $\sigma=8.3$ 天的正态分布, 抽取了 67 个成熟期的洋葱作为样本, 且样本均值 $\bar{x}=71.2$ 天, 试求 μ 置信度为 95% 的置信区间.

$$\text{解: } P\left\{-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha$$

$$P\left\{\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 1 - \alpha$$

又已知 $\bar{x}=71.2$, $\sigma=8.3$, 查标准正态分布表可得 $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$.

$$\text{置信下限: } \bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} = 71.2 - \frac{8.3}{\sqrt{67}} \times 1.96 = 69.21255$$

$$\text{置信上限: } \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} = 71.2 + \frac{8.3}{\sqrt{67}} \times 1.96 = 73.18745$$

故所求置信区间为 (69.21255, 73.18745).

31. 一个容量为 $n=16$ 的随机样本取自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中 μ, σ^2 均未知, 如果样本有均值 $\bar{x}=27.9$, 标准差 $s=3.23$, 试求 μ 的置信度为 99% 的置信区间.

$$\text{解: } P\left\{-t_{\alpha/2}(n-1) < \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1 - \alpha$$

$$P\left\{\bar{X} - t_{\alpha/2}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{\alpha/2}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}\right\} = 1 - \alpha$$

由样本数据计算得 $\bar{x}=27.9$, $s=3.23$, 查表得 $t_{0.005}(16-1)=t_{0.005}(15)=2.9467$, 故得 μ 的置信区间为

$$\left(\bar{x} - t_{0.005}(15) \frac{s}{\sqrt{16}}, \bar{x} + t_{0.005}(15) \frac{s}{\sqrt{16}}\right)$$

$$= \left(27.9 - 2.9467 \times \frac{3.23}{\sqrt{16}}, 27.9 + 2.9467 \times \frac{3.23}{\sqrt{16}} \right) = (25.52054, 30.27946)$$

32. 如果你在食品公司就职，要求估计一标准袋薯片的平均总脂肪量（单位：克）。现分析了 11 袋，并得下列结果： $\bar{x} = 18.2g, s^2 = 0.56g^2$ 。如果假定总脂肪量服从正态分布，试给出总体 μ 和 σ^2 和 σ 的 90% 置信区间。

$$\text{解：} P \left\{ -t_{\alpha/2}(n-1) < \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}(n-1) \right\} = 1 - \alpha$$

$$P \left\{ \bar{X} - t_{\alpha/2}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{\alpha/2}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}} \right\} = 1 - \alpha$$

由样本数据计算得 $\bar{x} = 18.2$ ， $s^2 = 0.56$ ，查表得 $t_{0.05}(11-1) = t_{0.05}(10) = 1.8125$ ，故得 μ 的置信区间为

$$\begin{aligned} & \left(\bar{x} - t_{0.05}(10) \frac{s}{\sqrt{10}}, \bar{x} + t_{0.05}(10) \frac{s}{\sqrt{10}} \right) \\ &= \left(18.2 - 1.8125 \times \frac{\sqrt{0.56}}{\sqrt{11}}, 18.2 + 1.8125 \times \frac{\sqrt{0.56}}{\sqrt{11}} \right) = (17.791045, 18.608955) ; \end{aligned}$$

$$P \left\{ \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1) \right\} = 1 - \alpha$$

$$P \left\{ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} \right\} = 1 - \alpha$$

查表得 $\chi^2_{0.95}(10) = 3.94$ ， $\chi^2_{0.05}(10) = 18.307$ 。因此可得 σ^2 的置信区间为

$$\left(\frac{10 \times 0.56}{18.307}, \frac{10 \times 0.56}{3.94} \right) = (0.30589, 1.42132)$$

σ 的置信区间为

$$\left(\sqrt{\frac{10 \times 0.56}{18.307}}, \sqrt{\frac{10 \times 0.56}{3.94}} \right) = (0.55307, 1.19219) .$$

33. 测得 16 头某品种牛的体高，得到 $\bar{x}_1 = 133cm, s_1 = 4.07cm$ ；而另外一品种 20 头牛的体高样本平均值 $\bar{x}_2 = 131cm$ ，样本标准差 $s_2 = 2.92cm$ ，假设两个品种牛的体高都服从正态分布，试求该两品种牛体高差的 95% 的置信区间。

$$\text{解: } P \left\{ \left| \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \right| < t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) \right\} = 1 - \alpha$$

$$P \left\{ \begin{aligned} &\bar{X} - \bar{Y} - t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 \\ &< \bar{X} - \bar{Y} + t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \end{aligned} \right\} = 1 - \alpha$$

查表得 $t_{0.025}(34) = 2.0322$, 计算得 $\bar{x}_1 = 133\text{cm}, s_1 = 4.07\text{cm}$, $\bar{x}_2 = 131\text{cm}$,

$s_2 = 2.92\text{cm}$, $s_w = \sqrt{\frac{15s_1^2 + 19s_2^2}{34}} = 2.291715$, 因此计算得 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 0.95 的

置信区间为 $(\bar{x} - \bar{y} - t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, \bar{x} - \bar{y} + t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}) =$
 $(0.43792, 3.56208)$.

34. 为检测某种激素对失眠的影响, 诊所的医生给两组睡眠不规律病人在临睡前服用不同剂量的激素, 然后测量他们从服药到入睡(电脑电波确定)的时间. 第一组服用的是 5mg 的剂量, 第二组服用的是 15mg 的剂量, 样本是独立的. 结果为 $n_1 = 10, \bar{x} = 14.8 \text{ min}, s_1^2 = 4.36 \text{ min}^2$; 第二组 $n_2 = 13, \bar{y} = 10.2 \text{ min}$, $s_2^2 = 4.66 \text{ min}^2$.

假定两个条件下的总体是正态分布, 试求两总体方差比 σ_1^2 / σ_2^2 的 90% 置信区间.

$$\text{解: } P \left\{ F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) < \frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) \right\} = 1 - \alpha$$

$$P \left\{ \frac{s_1^2 / s_2^2}{F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2 / s_2^2}{F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)} \right\} = 1 - \alpha$$

计算得知 $s_1^2 = 4.36$, $s_2^2 = 4.66$, 又查表得

$$F_{0.05}(9, 12) = 2.8 , F_{0.95}(9, 12) = \frac{1}{F_{0.05}(12, 9)} = \frac{1}{3.07} = 0.33$$

由此计算得 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信水平为 0.90 的置信区间为 $(0.3342, 2.8724)$.

四 . 证明题

35. 设 $\hat{\theta}$ 是参数 θ 的无偏估计量, 且 $D(\hat{\theta}) > 0$, 证明 $\hat{\theta}^2$ 不是 θ^2 的无偏估计量.

证明: 因为 $\hat{\theta}$ 是参数 θ 的无偏估计量, 所以 $E(\hat{\theta}) = \theta$,

又因为 $E(\hat{\theta}^2) = D(\hat{\theta}) + E^2(\hat{\theta}) > E^2(\hat{\theta}) = \theta^2$

所以 $\hat{\theta}^2$ 不是 θ^2 的无偏估计量.

36. 设总体 $X \sim U(\theta, 2\theta)$ 其中 $\theta > 0$ 是未知参数, 随机取一样本 X_1, X_2, \dots, X_n , 样本均值为 \bar{X} . 试证 $\hat{\theta} = \frac{2}{3} \bar{X}$ 是参数 θ 的无偏估计和一致估计.

证明: 因为 $E(\hat{\theta}) = \frac{2}{3} E(\bar{X}) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} \theta = \theta$, 所以 $\hat{\theta} = \frac{2}{3} \bar{X}$ 是参数 θ 的无偏估计.

又因为 $D(\hat{\theta}) = \frac{4}{9} D(\bar{X}) = \frac{4}{9} \times \frac{\theta^2}{12n}$

可得 $1 \geq \lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta} - \theta| \leq \varepsilon\} \geq 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{9} \times \frac{\theta^2}{12n}}{\varepsilon^2} = 1$,

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta} - \theta| \leq \varepsilon\} = 1$, $\hat{\theta} = \frac{2}{3} \bar{X}$ 是参数 θ 的一致估计.