

第 7 章数理统计基础习题解答

一. 选择题

1. 设 (X_1, X_2, \dots, X_n) 为总体 X 的样本, 则不成立的是(B).

A. 每个 X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 与 X 有相同的分布.

B. 每个 X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 是确定的数.

C. (X_1, X_2, \dots, X_n) 是 n 维随机变量.

D. (X_1, X_2, \dots, X_n) 各分量相互独立且同分布.

2. 设 (x_1, x_2, \dots, x_n) 是来自总体 X 的一个样本观测值, 则(A).

A. $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ 为 X 的 n 个取值.

B. $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ 的取值是不确定的.

C. $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ 与 X 有相同的分布.

D. $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ 与 X 有相同的数学特征.

3. 已知总体 X 服从 $[0, \lambda]$ 上的均匀分布(λ 未知) X_1, X_2, \dots, X_n 为 X 的样本, 则(C).

A. $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{\lambda}{2}$ 是一个统计量.

B. $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - E(X)$ 是一个统计量.

C. $X_1 + X_2$ 是一个统计量.

D. $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - D(X)$ 是一个统计量.

4. 设 (X_1, X_2, \dots, X_n) 是来自总体 X 的样本, \bar{X} 为样本平均值, 则下述结论不成立的是(C).

A. \bar{X} 与 $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 独立. B. 当 $i \neq j$ 时, X_i 与 X_j 独立.

C. $\sum_{i=1}^n X_i$ 与 $\sum_{i=1}^n X_i^2$ 独立. D. 当 $i \neq j$ 时, X_i 与 X_j^2 独立.

5. 样本 (X_1, X_2, \dots, X_n) 取自概率密度为 $p(x)$ 的总体, 则有(A).

A. $X_i \sim p(x), i=1, 2, \dots, n$. B. $\min\{X_1, \dots, X_n\} \sim p(x)$.

C. $\bar{X} \sim p(x)$. D. $\sum_{i=1}^n X_i$ 与 $\sum_{i=1}^n X_i^2$ 独立.

6. 设 (X_1, X_2, \dots, X_n) 是来自随机变量 X 的样本, \bar{X} 为样本均值, 则以下结论错误的是(C).

A. $E(\bar{X}) = E(X)$. B. $D(\bar{X}) = D(X)/n$.

C. $D(\bar{X}) = D(X)$. D. \bar{X} 是随机变量, $E(X)$ 是常数.

7. 设 $T \sim t(n)$, 则 $T^2 \sim$ (D).

A. $t(2n)$. B. $\chi^2(n)$. C. $F(n, 1)$. D. $F(1, n)$.

8. 设总体 $X \sim N(0, 1)$, X_1, X_2, \dots, X_n 为样本, 则下列结论中错误的是(D).

A. $\frac{X_1 - X_2}{(X_3^2 + X_4^2)^{\frac{1}{2}}} \sim t(2)$. B. $\frac{\sqrt{n-1} X_1}{\sqrt{\sum_{i=2}^n X_i^2}} \sim t(n-1)$.

$$C. \frac{(\frac{n}{3}-1)\sum_{i=1}^3 X_i^2}{\sum_{i=4}^n X_i^2} \sim F(3, n-3) . \quad D. \frac{X_1+X_2}{\sqrt{X_1^2+X_2^2}} \sim t(2) .$$

9. 设 (X_1, X_2, \dots, X_n) 是来自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, 样本均值和样本方差分

别为: $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, 则以下结论中错误的是(B).

A. \bar{X} 与 S^2 独立.

B. $(\bar{X} - \mu) / \sigma \sim N(0, 1)$.

C. $(n-1)S^2 / \sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$.

D. $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu) / S \sim t(n-1)$.

10. 设 (X_1, X_2, \dots, X_n) 是来自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, \bar{X} 为样本均

值, 记 $S_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, $S_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, $S_3^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$,

$S_4^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$, 则服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布的随机变量是(A).

A. $\frac{\bar{X} - \mu}{S_1 / \sqrt{n}}$.

B. $\frac{\bar{X} - \mu}{S_2 / \sqrt{n}}$.

C. $\frac{\bar{X} - \mu}{S_3 / \sqrt{n-1}}$.

D. $\frac{\bar{X} - \mu}{S_4 / \sqrt{n}}$.

11. 设 (X_1, X_2, \dots, X_n) 是来自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, S^2 为样本方差, 则

$(n-1)S^2 / \sigma^2$ 服从(C).

A. 正态分布.

B. t 分布.

C. χ^2 分布.

D. F 分布.

12. 样本 (X_1, X_2, \dots, X_n) 取自标准正态分布 $N(0, 1)$, \bar{X} 为样本均值, 及 S^2 为样本方差, 则以下结果不成立的是(B).

A. $X_i \sim N(0, 1), i = 1, 2, \dots, n$.

B. $\bar{X} \sim N(0, 1)$.

C. $\sqrt{n}\bar{X}/S \sim t(n-1)$.

D. $\sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi^2(n)$.

13. 设随机变量 $X \sim N(0,1)$ 与 $Y \sim \chi^2(n)$ 相互独立, 则 $T = X/\sqrt{Y/n}$ 服从(B) .

A. 正态分布 . B. 自由度为 n 的 t 分布 . C. χ^2 分布 . D. F 分布 .

14. 设 (X_1, \dots, X_n) 及 (Y_1, \dots, Y_m) 分别取自两个相互独立的正态总体 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 及

$N(\mu_2, \sigma^2)$ 的两个样本, 其样本方差分别为 S_1^2 及 S_2^2 , 则统计量 $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$ 服从 F 分布的自由度为(A) .

A. $(n-1, m-1)$. B. (n, m) . C. $(n+1, m+1)$. D. $(m-1, n-1)$.

二. 填空题

15. 设总体 $X \sim B(1, p)$ 分布, 其中 p 为未知参数 ($0 < p < 1$), X_1, X_2 是从中抽取的样本, 则样本空间为 $\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$. 如果 (X_1, X_2) 的一个观察值是

$(0,1)$, 则样本均值的观测值 $\bar{x} = \underline{\frac{1}{2}}$; 样本方差的观测值 $s^2 = \underline{\frac{1}{2}}$.

16. 从一批加工的零件中随机取 8 件, 测得其与标准件误差(单位 mm) 为 3.1, 2.6, 2.8, 3.3, 2.9, 3.2, 2.4, 2.5, 则总体 Z 为 该批零件的大小与标准件的误差 ; 样本为

(X_1, X_2, \dots, X_8) ; 样本观测值为 $(3.1, 2.6, 2.8, 3.3, 2.9, 3.2, 2.4, 2.5)$; 样本容量 $n = \underline{8}$; 样本均值的观测值

$\bar{x} = \underline{\frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 x_i = \frac{1}{8}(3.1+2.6+\dots+2.5) = 2.8500}$; 样本方差的观测值

$s^2 = \underline{\frac{1}{7} \sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2 = 0.1114}$; 样本二阶原点矩的观测值为

$b_2 = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 x_i^2 = 65.7600/8 = 8.2200$.

17. 设总体 $X \sim B(1, p)$, 其中未知参数 $0 < p < 1$, (X_1, X_2, \dots, X_n) 是 X 的样本 , 则

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = \frac{p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}}{1} .$$

18 . 设 (X_1, X_2, \dots, X_n) 为总体 X 的一个样本 , 则样本的 r 阶原点矩为

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^r ; \text{ 样本的 } r \text{ 阶中心矩为 } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^r .$$

19 . 设 (X_1, X_2, \dots, X_n) 为总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本 , 则 $E(X_i) = \underline{\mu}$;

$$D(X_i) = \underline{\sigma^2} ; E(X_i^2) = \underline{\sigma^2 + \mu^2} .$$

20. 设总体服从参数为 λ 的泊松分布 $X \sim P(\lambda)$, 求样本 (X_1, X_2, \dots, X_n) 均值的期望

$$E(\bar{X}) = \underline{E(X) = \lambda} \text{ 和方差 } D(\bar{X}) = \underline{D(X)/n = \lambda/n} .$$

21 . 设总体 $X \sim N(1, 4)$, (X_1, X_2, X_3) 是来自 X 的样本 , 其中 S^2 为样本方差 , 则

$$E(X_1^2 X_2^2 X_3^2) = \underline{E(X_1^2)E(X_2^2)E(X_3^2) = 125} ;$$

$$D(X_1 X_2 X_3) = \underline{E(X_1 X_2 X_3)^2 - E^2(X_1 X_2 X_3) = 124} ;$$

$$E(S^2) = \underline{D(X) = 4} ; D(S^2) = \underline{16} .$$

22. 设 (X_1, X_2, \dots, X_n) 是来自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本 , 则 $\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ 服

$$\text{从 } \underline{N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)} \text{ 分布.}$$

23. 设 (X_1, X_2, \dots, X_n) 是来自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的样本 , 则 $Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma}$ 服

$$\text{从 } \underline{N(0,1)} \text{ 分布.}$$

24 . 设总体 $X \sim N(2, 3^2)$, X_1, X_2, \dots, X_n 为 X 的一个简单样本 , 则 $\sum_{i=1}^n (X_i - 2)^2 / 3^2$ 服

$$\text{从的分布是 } \underline{\chi^2(n)} .$$

25. 设样本 X_1, X_2, \dots, X_{n_1} 来自总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, 样本均值和样本方差分别为 :

$$\bar{X} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i, S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2, \text{ 又设样本 } Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} \text{ 来自总体 } Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2),$$

样本均值和样本方差分别为 : $\bar{Y} = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} Y_i, S_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \bar{Y})^2$, 且两个样本相互独立 , 则 $\frac{S_1^2}{S_2^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ 服从 $F(n_1 - 1, n_2 - 1)$ 分布 .

26. 设 z_α 为标准正态分布的上侧分位数 , 查表得 $z_{0.0495} = 1.65$; 若 $z_\alpha = 2.31$, 查表得 $\alpha = 0.0104$.

27. 设 $t_\alpha(n)$ 为 t 分布的上侧分位数 , 则查表得 $t_{0.025}(5) = 2.5706$; 若 $t_\alpha(6) = 3.7074$, 查表得 $\alpha = 0.005$.

28. 设 $F_\alpha(m, n)$ 为 F 分布的上侧分位数 , 则查表得 $F_{0.05}(5, 4) = 6.26$; 查表得 $F_{0.95}(5, 4) = \frac{1}{F_{0.05}(4, 5)} = \frac{1}{5.19} = 0.193$; 若 $F_\alpha(6, 3) = 14.73$, 查表得 $\alpha = 0.025$.

三 . 应用计算题

29. 设总体 $X \sim U[a, b]$, 求样本均值的期望和方差 .

解 : 设 (X_1, X_2, \dots, X_n) 是来自总体 $X \sim U[a, b]$ 的样本 , 则

$$\text{由 } E(X) = (a + b) / 2 \text{ 知 , } E(\bar{X}) = E(X) = (a + b) / 2$$

$$\text{由 } D(X) = (b - a)^2 / 12 \text{ 知 , } D(\bar{X}) = D(X) / n = (b - a)^2 / 12n$$

30. 设 X_1, \dots, X_n 为总体 $X \sim B(1, p)$ 的一个样本 , 求 $E(\bar{X})$ 和 $D(\bar{X})$, 并求样本方差

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \text{ 的数学期望 .}$$

解 : 由性质可知 , $E(\bar{X}) = E(X) = p$

$$D(\bar{X}) = D(X) / n = p(1 - p) / n$$

$$E(S^2) = D(X) = p(1-p).$$

31. 在天平上重复称一重量为 a 的物品, 假设各次称量结果相互独立且都服从正态分布 $N(a, 0.2^2)$. 若以 \bar{X}_n 表示 n 次称量结果的算术平均值, 要使 $P\{|\bar{X}_n - a| < 0.1\} \geq 0.95$, 求 n 的最小值.

解: 由 $P\{|\bar{X}_n - a| < 0.1\} = 2\Phi\left(\frac{0.1}{0.2/\sqrt{n}}\right) - 1 = 2\Phi(0.5\sqrt{n}) - 1 \geq 0.95$ 可得, $\Phi(0.5\sqrt{n}) \geq 0.975$, $0.5\sqrt{n} \geq 1.96$, $n \geq 15.3664$, 所以 n 的最小值为 16.

32. 从总体 $N(50, \sigma^2)$ 中随机抽取一容量为 16 的样本, 在下列两种情况下分别求概率 $P\{47.99 \leq \bar{X} \leq 52.01\}$.

(1) 已知 $\sigma^2 = 5.5^2$;

(2) 未知 σ^2 , 而样本方差 $s^2 = 36$.

解: (1) 由 $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ 得

$$\begin{aligned} P\{47.99 \leq \bar{X} \leq 52.01\} &= \Phi\left(\frac{52.01 - 50}{5.5/4}\right) - \Phi\left(\frac{47.99 - 50}{5.5/4}\right) \\ &\approx \Phi(1.46) - \Phi(-1.46) = 2\Phi(1.46) - 1 \approx 2 \times 0.9279 - 1 = 0.8558 \end{aligned}$$

(2) 由 $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$, $t_{0.10}(15) = 1.3406$ 得

$$\begin{aligned} P\{47.99 \leq \bar{X} \leq 52.01\} &= P\left\{\frac{47.99 - 50}{6/4} \leq \frac{\bar{X} - 50}{6/4} \leq \frac{52.01 - 50}{6/4}\right\} \\ &= P\left\{-1.34 \leq \frac{\bar{X} - 50}{6/4} \leq 1.34\right\} \approx 1 - 2 \times 0.10 = 0.80 \end{aligned}$$

33. 从总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 中抽取 $n_1 = 9, n_2 = 12$ 的两个独立样本, 试求两个样本均值 \bar{X} 与 \bar{Y} 之差的绝对值小于 1.5 的概率, 若

(1) 已知 $\sigma^2 = 4$;

(2) σ^2 未知, 但两个样本方差分别为 $S_1^2 = 4.1, S_2^2 = 3.7$.

解：(1) 由 $\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}} \sim N(0,1)$ 得

$$P\{|\bar{X} - \bar{Y}| < 1.5\} = P\left\{\frac{|\bar{X} - \bar{Y}|}{\sqrt{4/9 + 4/12}} < \frac{1.5}{\sqrt{4/9 + 4/12}}\right\} = P\left\{\frac{|\bar{X} - \bar{Y}|}{\sqrt{4/9 + 4/12}} < 1.70\right\}$$

$$\approx 2\Phi(1.70) - 1 \approx 2 \times 0.9554 - 1 = 0.9108$$

(2) 由 $\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$, $t_{0.05}(19) = 1.7291$,

$$S_w^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{8 \times 4.1 + 11 \times 3.7}{19} = 3.8684 \text{ 得}$$

$$P\{|\bar{X} - \bar{Y}| < 1.5\} = P\left\{\frac{|\bar{X} - \bar{Y}|}{\sqrt{3.8684} \sqrt{1/9 + 1/12}} < \frac{1.5}{\sqrt{3.8684} \sqrt{1/9 + 1/12}}\right\}$$

$$= P\left\{\frac{|\bar{X} - \bar{Y}|}{\sqrt{3.8684} \sqrt{1/9 + 1/12}} < 1.7295\right\} \approx 1 - 2 \times 0.05 = 0.90$$

*34. 随机地抽取某校 100 个初一学生，测得他们的身高（单位：厘米）数据如下：

身高	160 ~ 162	163 ~ 165	166 ~ 168	169 ~ 171	172 ~ 174
频数	7	16	38	31	8

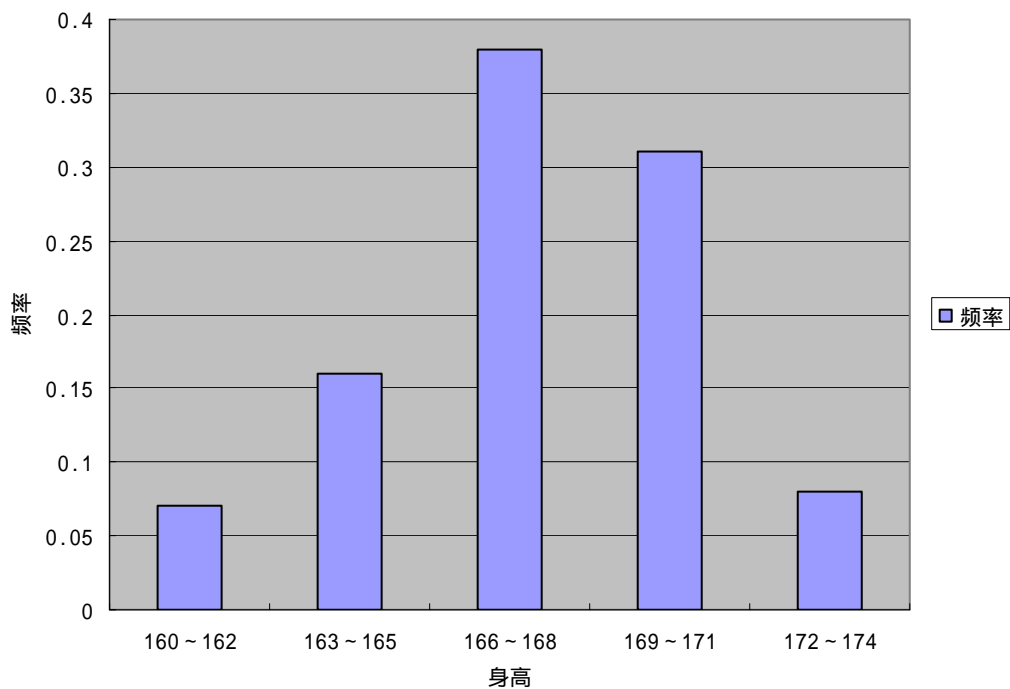
试做出频率直方图。

解：

身高频率表

身高	频数	频率
160 ~ 162	7	0.07
163 ~ 165	16	0.16
166 ~ 168	38	0.38
169 ~ 171	31	0.31
172 ~ 174	8	0.08

身高频率直方图



*35. 根据调查,某集团公司的中层管理人员的月薪数据如下(单位:千元):40.6, 39.6, 37.8, 36.2, 38.8, 38.6, 39.6, 40.0, 34.7, 41.7, 38.9, 37.9, 37.0, 35.1, 36.7, 37.1, 37.7, 39.2, 36.9, 38.3. 试画出茎叶图.

解:某集团公司的中层管理人员的月薪茎叶图如下

34	7				
35	1				
36	2	7	9		
37	0	1	7	8	9
38	3	6	8	9	
39	2	6	6		
40	0	6	7		