

第6章大数定律及中心极限定理习题解答

一. 选择题

1. 设 $E(X) = 6$, $D(X) = 6$, 利用切比雪夫不等式估计得 $P\{0 < X < 12\} \geq$ (B).

A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{5}{6}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{2}$.

2. 设 $E(X) = \mu$, $D(X) = \sigma^2$, 利用切比雪夫不等式估计得

$P\{|X - \mu| < 4\sigma\} \geq$ (B).

A. $\frac{8}{9}$. B. $\frac{15}{16}$. C. $\frac{9}{10}$. D. $\frac{1}{10}$.

3. 设随机变量 X 满足等式 $P\{|X - E(X)| \geq 2\} = 1/16$, 则必有(D).

A. $D(X) = \frac{1}{4}$. B. $D(X) > \frac{1}{4}$.
C. $D(X) < \frac{1}{4}$. D. $P\{|X - E(X)| < 2\} = \frac{15}{16}$.

4. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 独立同分布, 且 $E(X_i) = 2$, $D(X_i) = 2$, 利用切比雪夫不等式估

计得 $P\left\{0 < \sum_{i=1}^n X_i < 4n\right\} \geq$ (B).

A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{2n-1}{2n}$. C. $\frac{1}{2n}$. D. $\frac{1}{n}$.

5. 设 X_1, X_2, \dots, X_9 独立同分布, 且 $E(X_i) = 1$, $D(X_i) = 1$, 则对于任意给定的正数

$\varepsilon > 0$ 有(D).

A. $P\left\{\left|\sum_{i=1}^9 X_i - 1\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{1}{\varepsilon^2}$. B. $P\left\{\left|\frac{1}{9}\sum_{i=1}^9 X_i - 1\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{1}{\varepsilon^2}$.
C. $P\left\{\left|\sum_{i=1}^9 X_i - 9\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{1}{\varepsilon^2}$. D. $P\left\{\left|\sum_{i=1}^9 X_i - 9\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{9}{\varepsilon^2}$.

6. 设 $X \sim B(n, p)$, $0 < p < 1$, 则对于任一实数 x , 有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left\{\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x\right\} =$ (A).

A. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. B. 0. C. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. D. $\int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

二．填空题

7．设 $E(X)$ 与 $D(X)$ 存在，对任意给定的 $\varepsilon > 0$ ，则有概率

$$P\{|X - E(X)| < \varepsilon\} \geq \frac{1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}}{1}.$$

8．设 $E(X) = \frac{2}{5}$ ， $D(X) = \frac{1}{25}$ ，则 $P\left\{\left|X - \frac{2}{5}\right| < \frac{1}{3}\right\} \geq \frac{16}{25}$ ．

9．某批产品的次品率为0.1，连续抽取10000件， X 表示其中的次品数，用中心极限定理计算得 $P\{X > 1030\} = \underline{0.1587}$ ．

10．设独立随机变量 X_1, X_2, \dots, X_{100} 均服从参数为 $\lambda = 4$ 的泊松分布，用中心极限定理计算得 $P\left\{\sum_{i=1}^{100} X_i < 420\right\} = \underline{0.8413}$ ．

11．某保险公司每月收到保险费为 X_i ， $E(X_i) = 10$ (万元)， $D(X_i) = 1$ ，用中心极限定理确定 100 个月收到保险费超过 1010 万元的概率 $P\left\{\sum_{i=1}^{100} X_i > 1010\right\} = \underline{0.1587}$ ．

12．设某种药物对某种病的治愈率为0.8，现有1000个这种病人服用此药，根据中心极限定理确定至少有780人被治愈的概率为 $\underline{0.9418}$ ．

13．掷一均匀硬币10000次， X 表示出现正面的次数，试用中心极限定理计算 $P\{5100 < X < 10000\} = \underline{0.0228}$ ．

14．设每次射击击中目标的概率为0.001，如果射击5000次，试根据中心极限定理击中次数不大于2的概率等于 $\underline{0.0898}$ ．

15．设 X_1, X_2, \dots, X_n 是独立同分布的随机变量序列，且 $E(X_i) = \mu$ ， $D(X_i) = \sigma^2$ 均存在，令 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 则对任意的 $\varepsilon > 0$ ，有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\bar{X} - \mu| \geq \varepsilon\} = \underline{0}$ ．

三．应用计算题

16．设 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 是相互独立的随机变量， $P\{X_n = 0\} = 1 - \frac{2}{n}$ ， $P\{X_n = n\} = \frac{1}{n}$ ， $P\{X_n = -n\} = \frac{1}{n}$ ， $n = 1, 2, \dots$ ，问 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 是否服从切比雪夫大数定律？

解： $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 是相互独立

$$E(X_n) = (-n) \cdot \frac{1}{n} + 0 \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) + n \cdot \frac{1}{n} = 0$$

$$E(X_n^2) = (-n)^2 \cdot \frac{1}{n} + 0^2 \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) + n^2 \cdot \frac{1}{n} = 2n$$

$$D(X_n) = E(X_n^2) - E^2(X_n) = 2n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(X_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n = \infty$$

所以， $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 不服从切比雪夫大数定律。

17. 某个计算机系统有 120 个终端，在某一指定时间内每个终端有 5% 的时间在使用，假定各个终端用与否是相互独立的，试求这一指定时间内使用的终端个数 X 在 10 个到 20 个概率。($\Phi(2.46) = 0.9931$, $\Phi(5.86) \approx 1$, $\Phi(1.67) = 0.9525$, $\Phi(0.80) = 0.7881$)

解： $X \sim B(120, 0.05)$, $E(X) = 120 \times 0.05 = 6$, $D(X) = 120 \times 0.05 \times 0.95 = 5.7$

由中心极限定理知

$$P\{10 \leq X \leq 20\} = P\left\{\frac{10-6}{\sqrt{5.7}} \leq \frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}} \leq \frac{20-6}{\sqrt{5.7}}\right\}$$
$$\approx \Phi(5.86) - \Phi(1.67) \approx 1 - 0.9525 = 0.0475$$

18. 某批产品的次品率是 0.005，试用中心极限定理求任意抽取 10000 件产品中次品数不多于 70 件的概率。

解：设 X_i 表示抽出的第 i 件产品的次品数， X 表示抽出的 10000 件产品的次品数，则

$$E(X_i) = 0.005 , D(X_i) = 0.005 \times 0.995 = 0.004975 , E(X) = 50 , D(X) = 49.75 ,$$

$$\sqrt{D(X)} \approx 7.05 , \text{查表得 } \Phi(2.84) = 0.9977$$

$$\text{所以, } P\{X \leq 70\} = P\left\{\frac{X-50}{7.05} \leq \frac{70-50}{7.05}\right\} = P\left\{\frac{X-50}{7.05} \leq 2.84\right\} = \Phi(2.84) = 0.9977$$

19. 为了使问题简化，计算机进行数的加法运算时，把每个加数取为最接近于它的整数(其最后一位四舍五入)来计算，设所有的取整误差是相互独立的，且它们都在 $[-0.5, 0.5]$ 上服从均匀分布，问多少个数相加时可使误差和的绝对值小于 10 的概率为 0.90？

解 :设各个数的取整数误差为 $X_k \sim U[-0.5, 0.5]$, 令 n 个数相加的误差总和 $Y = \sum_{k=1}^n X_k$,

则 $E(X_k) = 0$, $D(X_k) = \frac{1}{12}$, 从而 $E(Y) = 0$, $D(Y) = \frac{n}{12}$.

由题意及由中心极限定理知

$$P\{|Y| < 10\} = P\left\{\left|\frac{Y}{\sqrt{n/12}}\right| < \frac{10}{\sqrt{n/12}}\right\} \approx 2\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{n/12}}\right) - 1 = 0.9$$

$$\text{即 } \Phi\left(\frac{10}{\sqrt{n/12}}\right) = 0.95 \text{ , 由查表得 } 10\sqrt{\frac{12}{n}} = 1.645 \text{ , 解出 } n = \frac{12}{(0.1645)^2} \approx 443$$

故约有 443 个数相加时可使得误差总和的绝对值小于 10 的概率为 0.90 .