

第5章常用随机变量的分布习题解答

一. 选择题

1. 设随机变量 $X \sim B(2, p)$, $Y \sim B(4, p)$, 已知 $P\{X \geq 1\} = \frac{5}{9}$, 则 $P\{Y \geq 1\} =$ (A).

- A. $\frac{65}{81}$. B. $\frac{56}{81}$. C. $\frac{80}{81}$. D. 1.

2. 设 $X \sim B(n, p)$, 且 $E(X) = 2.4$, $D(X) = 1.2^2$, 则参数 n 与 p 之值为 (B).

- A. $n = 4, p = 0.6$. B. $n = 6, p = 0.4$.

- C. $n = 25, p = 0.096$. D. $n = 3, p = 0.8$.

3. 随机变量 X 服从参数 $\lambda = 4$ 的泊松分布, 则 $E(X^2) =$ (B).

- A. 16. B. 20. C. 4. D. 12.

4. 设随机变量 X 服从 $\lambda = 2$ 的泊松分布, 则 $D(2X) =$ (A).

- A. 8. B. 4. C. 2. D. 16.

5. 设 X 与 Y 都服从区间 $[0, 2]$ 上的均匀分布, 则 $E(X + Y) =$ (B).

- A. 1. B. 2. C. 0.5. D. 4.

6. 随机变量 X 服从 $[-3, 3]$ 上的均匀分布, 则 $E(X^2) =$ (A).

- A. 3. B. $\frac{9}{2}$. C. 9. D. 18.

7. 随机变量 X 服从指数分布, 参数 $\lambda =$ (D) 时, $E(X^2) = 18$

- A. 3. B. 6. C. $\frac{1}{6}$. D. $\frac{1}{3}$.

8. 设 X 服从参数为 λ 的指数分布, 且 $D(X) = 4$, 则 $\lambda =$ (C).

- A. 4. B. 2. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{4}$.

9. 已知随机变量 X 的分布函数 $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, 则 $\Phi(-x) =$ (B).

- A. $\Phi(x)$. B. $1 - \Phi(x)$. C. $-\Phi(x)$. D. $\frac{1}{2} + \Phi(x)$.

10. 设 $X \sim N(0, 1)$, $Y = 2X - 1$, 则 $Y \sim$ (B).

A. $N(0, 1)$. B. $N(-1, 4)$. C. $N(-1, 2)$. D. $N(-1, 3)$.

11. 若 X 的概率密度函数为 $p(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2+4x-4}$, 则有(B).

A. $X \sim N(0, 1)$. B. $X \sim N\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

C. $X \sim N\left(4, \frac{1}{4}\right)$. D. $X \sim N(2, 1)$.

12. 设随机变量 X 的概率密度为 $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{3}} e^{-\frac{(x-2)^2}{6}}$, 则 $D(X) =$ (C).

A. $\sqrt{3}$. B. $\sqrt{6}$. C. 3. D. 6.

13. 设 $X \sim B(25, 0.2)$, $Y \sim N(a, \sigma^2)$, 且 $E(X) = E(Y)$, $D(X) = D(Y)$, 则 Y 的密度函数 $p(y) =$ (C).

A. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$. B. $\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{8}}$. C. $\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-5)^2}{8}}$. D. $\frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-5)^2}{32}}$.

14. 随机变量 $X \sim N(a, \sigma^2)$, 记 $g(\sigma) = P\{|X - a| < \sigma\}$, 则随着 σ 的增大, $g(\sigma)$ 之值(A).

A. 保持不变. B. 单调增大. C. 单调减少. D. 增减性不确定.

15. 设 $X \sim N(a, \sigma^2)$, $Y \sim N(0, 1)$, 则 X 与 Y 的关系为(C).

A. $Y = \frac{X-a}{\sigma^2}$. B. $Y = aX + a$. C. $Y = \frac{X-a}{\sigma}$. D. $Y = \frac{X}{\sigma} - a$.

16. 下列命题中错误的是(B).

A. 若 $X \sim P(\lambda)$, 则 $E(X) = D(X) = \lambda$.

B. 若 X 服从参数为 λ 的指数分布, 则 $E(X) = D(X) = \frac{1}{\lambda}$.

C. 若 $X \sim B(1, \theta)$, 则 $E(X) = \theta$, $D(X) = \theta(1-\theta)$.

D. 若 $X \sim U[a, b]$, 则 $E(X^2) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$.

二. 填空题

17. 某射手每次射击命中目标的概率是 0.8 , 现连续射击 30 次 , 命中目标的次数为 X , 则当 $k = 0, 1, 2, \dots, 30$ 时 , $P\{X = k\} = \underline{C_{30}^k (0.8)^k (0.2)^{30-k}}$.

18. 设随机变量 $X \sim B(n, p)$, 则 $D(X + 2) = \underline{D(X) = np(1-p)}$.

19. 设 $X \sim B(100, 0.8)$, 则 $Y = aX + b = \underline{\frac{1}{4}X - 20 \text{ 或 } Y = -\frac{1}{4}X + 20}$ 可使

$E(Y) = 0, D(Y) = 1$.

20. 设 $X_i \sim B(1, p)$, 且 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立 , 则 $E\left(X_k \sum_{i=1}^n X_i\right) = \underline{p[1 + (n-1)p]}$.

21. 设电话交换台每分钟的呼唤次数 X 服从参数为 4 的泊松分布 , 则某分钟完全没有呼唤的概率为 $\underline{P(X = 0) = \frac{4^0}{0!} e^{-4} = e^{-4}}$.

22. 设 X 服从泊松分布 , 且 $E(X^2) = 20$, 则 $E(X) = \underline{4}$.

23. 设 X 服从在区间 $[-1, 5]$ 上的均匀分布 , 则 $D(X) = \underline{\frac{(5+1)^2}{12} = 3}$.

24. 设 $Z \sim N(0, 1)$, $\Phi(z) = P\{Z \leq z\}$, 又 $Y \sim N(6, 3^2)$, 用 $\Phi(x)$ 之值表示概率 $P\{Y > 10.5\} = \underline{1 - \Phi(1.5)}$.

25. 设 $Z \sim N(0, 1)$, $\Phi(x) = P\{Z \leq x\}$, 且 $a > 0$, $b > 0$, 用分布函数 $\Phi(x)$ 之值表示概率 $P\{-a < Z \leq b\} = \underline{\Phi(b) + \Phi(a) - 1}$.

26. 设 $X \sim N(-2, 4)$, 则 $P\{X > 1\} = \underline{1 - \Phi\left(\frac{1+2}{2}\right) = 0.0668}$.

27. 设 $Z \sim N(0, 1)$, $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数 , 且有 $\Phi(1.96) = 0.975$, 则 $P\{|Z| < 1.96\} = \underline{0.95}$.

28. 设 $Z \sim N(0,1)$, $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数 , 且有 $\Phi(1)=0.8413$, 则 $P\{Z > -1\} = \underline{0.8413}$.

29. 设 $Z \sim N(0,1)$, 则 $Y = aZ + b \sim \underline{N(b, a^2)}$.

30. 设随机变量 X_1, X_2, X_3, X_4 相互独立 , 且都服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)(\sigma > 0)$ 则 $\frac{1}{4}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)$ 服从的分布是 $\underline{N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{4}\right)}$.

31. 设 $X \sim N(0,1)$ 与 $Y \sim N(2,1)$ 相互独立 , 则 $D(X - Y + 1) = \underline{2}$.

32. 设 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数 , 则查表得 $\Phi(1.12) = \underline{0.8686}$;
 $\Phi(-1.51) = \underline{1 - \Phi(1.51) = 0.0655}$; 若 $\Phi(x) = 0.8869$, 则查表得 $x = \underline{1.21}$.

三 . 应用计算题

33. 设 $X \sim B(4, p)$, $Y = \sin\left(\frac{\pi}{2}X\right)$, 求 $E(Y)$.

$$\begin{aligned} \text{解: } E(Y) &= \sum_{k=0}^4 \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot k\right) P(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^4 \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot k\right) C_4^k p^k (1-p)^{4-k} = 4p(1-p)(1-2p) \end{aligned}$$

34. 有一繁忙的汽车站 , 每天有大量汽车通过 , 设一辆汽车在一天的某段时间内出事故的概率为 0.0001. 在某天的该时间段内有 1000 辆汽车通过 , 问出事故的车辆数不小于 2 的概率是多少 ? (利用泊松定理计算)

解 : 设 X 为出事故的车辆数 , 则 $X \sim B(1000, 0.0001)$, 令 $\lambda = 1000 \times 0.0001 = 0.1$ 出事故的车辆数不小于 2 的概率为

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \approx 1 - e^{-0.1} - \frac{0.1^1}{1!} e^{-0.1} = 1 - 1.1e^{-0.1}$$

35. 设随机变量 X 服从泊松分布 , 且知 $P\{X = 1\} = P\{X = 2\}$, 求 $P\{X = 4\}$.

解 : 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布 , 则由 $P\{X = 1\} = P\{X = 2\}$ 可得

$$\frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda} = \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}, \lambda = 2$$

$$P\{X=4\} = \frac{2^4}{4!}e^{-2} = \frac{2}{3}e^{-2}$$

36. 设电阻的阻值 R 是一随机变量, 均匀分布在 800 欧~1000 欧, 求 R 的密度函数及 R 落在 850 欧~950 欧的概率.

解: R 的密度函数为

$$p(y) = \begin{cases} \frac{1}{200} & 800 \leq y \leq 1000 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$P\{850 < R < 950\} = \int_{850}^{950} \frac{1}{200} dr = \frac{1}{200}(950 - 850) = \frac{1}{2} = 0.5$$

37. 假设某元件使用寿命 X (单位: 小时) 服从参数为 $\lambda = 0.002$ 的指数分布, 试求该元件能正常使用 600 小时以上的概率是多少?

解: 该元件能正常使用 600 小时以上的概率为

$$P(X \geq 600) = \int_{600}^{\infty} 0.002e^{-0.002x} dx = e^{-1.2}$$

38. 设 X 的密度函数为: $p_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$, 求 $Y = 2X$ 的密度函数.

$$\text{解: } F_Y(y) = P\{2X \leq y\} = P\left\{X \leq \frac{y}{2}\right\} = \int_{-\infty}^{\frac{y}{2}} p_X(t) dt = F_X\left(\frac{y}{2}\right)$$

$$\therefore p_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

39. 设 $X \sim N(4, 2^2)$, 查表计算 $P\{|X-5| \leq 2\}$ 与 $P\{X \geq 5\}$.

$$\text{解: } P\{|X-5| \leq 2\} = P\{3 \leq X \leq 7\} = \Phi\left(\frac{7-4}{2}\right) - \Phi\left(\frac{3-4}{2}\right) = \Phi(1.5) - \Phi(-0.5)$$

$$= \Phi(1.5) + \Phi(0.5) - 1 = 0.9332 + 0.6915 - 1 = 0.6247$$

$$P\{X \geq 5\} = 1 - \Phi\left(\frac{5-4}{2}\right) = 1 - \Phi(0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085$$

40. 测量某零件长度的误差 $X \sim N(3, 4)$.

(1) 求误差的绝对值不超过 3 的概率；

(2) 如果测量两次，求至少有一次误差的绝对值不超过 3 的概率。

解：(1) 误差的绝对值不超过 3 的概率为

$$P(|X| \leq 3) = \Phi\left(\frac{3-3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-3-3}{2}\right) = \Phi(0) - \Phi(-3) = \Phi(0) + \Phi(3) - 1 = 0.4987$$

(2) 设 Y 为测量两次误差的绝对值不超过 3 的次数，则至少有一次误差的绝对值不超过 3 的概率为

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - (1 - 0.4987)^2 \approx 0.7487$$

41. 一般认为各种考试成绩服从正态分布，假定在一次公务员资格考试中，只能通过考试人数的 5%，而考生的成绩 X 近似服从 $N(60, 100)$ ，问至少要多少分才可能通过这次资格考试？

解：设至少要 x 分才可能通过这次资格考试，则有

$$P(X \geq x) \approx 1 - \Phi\left(\frac{x-60}{10}\right) = 0.05$$

$$\Phi\left(\frac{x-60}{10}\right) = 0.95, \text{查表得 } \frac{x-60}{10} = 1.645, x = 76.45$$

42. 设 X 与 Y 相互独立，且 X 服从 $\lambda = 3$ 的指数分布， Y 服从 $\lambda = 4$ 的指数分布，试求：(1) (X, Y) 的联合概率密度与联合分布函数；(2) $P\{X < 1, Y < 1\}$ 。

解：(1) (X, Y) 的联合概率密度为

$$p(x, y) = p_X(x)p_Y(y) = \begin{cases} 3e^{-3x} \cdot 4e^{-4y}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} = \begin{cases} 12e^{-(3x+4y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(X, Y) 的联合分布函数为

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y) = \begin{cases} (1 - e^{-3x})(1 - e^{-4y}), & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$(2) P\{X < 1, Y < 1\} = F(1, 1) = (1 - e^{-3})(1 - e^{-4})$$