

## 第4章随机变量数字特征习题解答

### 一. 选择题

1. 若随机变量  $X$  的概率密度为  $p(x) = \begin{cases} 1-|x| & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$ , 则  $X$  的数学期望

$E(X) = (A)$ .

A. 0.      B. 1.      C.  $\frac{1}{2}$ .      D.  $\frac{1}{4}$ .

2. 设  $F(x) = P\{X \leq x\} = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$ , 则  $E(X) = (B)$ .

A.  $\int_0^1 x^3 dx$ .      B.  $\int_0^1 2x^2 dx$ .      C.  $\int_0^1 x^2 dx$ .      D.  $\int_0^{+\infty} 2x^2 dx$ .

3. 若随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立, 且方差  $D(X) = 2$ ,  $D(Y) = 1.5$ , 则

$D(3X - 2Y - 1) = (B)$ .

A. 9.      B. 24.      C. 25.      D. 2.

4.  $D(X) = 4$ ,  $D(Y) = 1$ ,  $\rho_{XY} = 0.6$ , 则  $D(3X - 2Y) = (C)$ .

A. 40.      B. 34.      C. 25.6.      D. 17.6.

5. 相关系数  $\rho$  的取值范围是  $(B)$ .

A.  $[0, +\infty)$ .      B.  $[-1, 1]$ .      C.  $[0, 1]$ .      D.  $(-\infty, +\infty)$ .

6. 设  $X$  是一随机变量  $E(X) = \mu$ ,  $D(X) = \sigma^2$  ( $\sigma > 0$ ),  $C$  是任意常数, 则有  $(D)$ .

A.  $E(X - C)^2 = E(X^2) - C^2$ .      B.  $E(X - C)^2 = E(X - \mu)^2$ .

C.  $E(X - C)^2 < E(X - \mu)^2$ .      D.  $E(X - C)^2 \geq E(X - \mu)^2$ .

7. 5 个灯泡的寿命  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$  独立同分布且  $E(X_i) = \mu$ ,

$D(X_i) = \sigma^2$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ), 则 5 个灯泡的平均寿命  $Y = \frac{1}{5}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5)$  的

方差  $D(Y) = (C)$ .

A.  $5\sigma^2$ .      B.  $\sigma^2$ .      C.  $0.2\sigma^2$ .      D.  $0.04\sigma^2$ .

8. 设随机变量  $X, Y$  独立同分布, 记  $\xi = X + Y$ ,  $\eta = X - Y$ , 则随机变量  $\xi$  与  $\eta$  之间的关系必然是( **C** ).

A. 不独立.      B. 独立.      C. 相关系数等于 0.      D. 相关系数不为 0.

9. 对于任意两个随机变量  $X$  和  $Y$ , 若  $E(XY) = E(X)E(Y)$ , 则有( **B** ).

A.  $D(XY) = D(X)D(Y)$ .      B.  $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$ .  
C.  $X$  和  $Y$  独立.      D.  $X$  和  $Y$  不独立.

## 二. 填空题

10.  $X$  的分布律为

$X$	1	2	3
$P$	0.15	0.3	0.55

则  $E(X) = \underline{1 \times 0.15 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.55 = 2.4}$ .

11. 设  $X$  的分布律为  $P\{X = k\} = \frac{1}{5}, k = 1, 2, 3, 4, 5$  则  $E(X + 2)^2 = \underline{27}$ .

12. 设  $X$  的概率密度为  $p(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ , 则  $E(2X + 1) = \underline{3}$ .

13. 设南方人的身高为随机变量  $X$ , 北方人的身高为随机变量  $Y$ , 通常说“北方人比南方人高”, 这句话的含义是  $\underline{E(Y) > E(X)}$ .

14. 已知  $(X, Y)$  的联合分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0.1	0.05	0.25
1	0	0.1	0.2
2	0.2	0.1	0

则  $E(X) = \underline{0.9}$ ;  $E(Y) = \underline{1.15}$ .

15. 设  $(X, Y)$  的概率密度为  $p(x, y) = \begin{cases} x + y & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ , 则

$E(XY) = \underline{1/3}$ .

16. 设  $(X, Y)$  的分布律为

$X \backslash Y$	-1	1	2
-1	$\frac{5}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{6}{20}$
2	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$

则  $E(X - Y) = \underline{-1/2}$  .

17. 设  $X$  的概率密度为  $p(x) = \begin{cases} 1-|x| & |x| < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$  , 则  $D(X) = \underline{1/6}$  .

18. 设  $(X, Y)$  的联合分布率为

$X \backslash Y$	-1	1
-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

则  $Cov(X, Y) = \underline{1/3}$  .

19. 若  $Cov(X_1, X_3) = 2$  ,  $Cov(X_2, X_3) = 1$  , 则  $Cov(X_1 + X_2, 3X_3) = \underline{9}$  .

20. 若随机变量  $X$  与  $Y$  相互独立 , 且方差  $D(X) = 0.5$  ,  $D(Y) = 1$  , 则  $D(2X - 3Y) = \underline{11}$  .

21. 若  $D(X) = 4$  ,  $D(Y) = 1$  ,  $\rho_{XY} = \frac{1}{2}$  , 则  $D(X - Y) = \underline{3}$  .

22. 若  $(X, Y)$  的相关系数  $\rho_{XY}$  存在 , 则  $|\rho_{XY}|$  的可能的最大值等于  $\underline{1}$  .

23. 若随机变量  $(X, Y)$  的相关系数  $\rho_{XY}$  存在 , 则  $|\rho_{XY}| = 1$  的充要条件是  $P\{Y = a + bX\} = \underline{1}$  . (其中  $a, b$  是某实数 , 且  $b \neq 0$ )

24. 人体的体重为随机变量  $X$  , 且  $E(X) = a$  , 10 个人的平均体重为  $Y = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}}{10}$  ( $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$  与  $X$  同分布) , 则  $E(Y) = \underline{a}$  .

25. 对目标进行独立射击每次命中率均为  $p = 0.25$  , 重复进行射击直至命中目标为止 , 设  $X$  表示射击次数 , 则  $E(X) = \underline{4}$  .

### 三. 应用计算题

26. 设随机变量  $X$  的分布律为

$X$	-2	0	2
$P$	0.4	0.3	0.3

求  $E(X)$ ,  $E(X^2)$  和  $E(3X+5)$ .

$$\text{解: } E(X) = -2 \times 0.4 + 0 \times 0.3 + 2 \times 0.3 = -0.2$$

$$E(X^2) = (-2)^2 \times 0.4 + 0^2 \times 0.3 + 2^2 \times 0.3 = 2.8$$

$$E(3X+5) = 3E(X) + 5 = 3 \times (-0.2) + 5 = 4.4$$

27. 设随机变量  $X$  的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0.5e^x, & x < 0 \\ 0.5, & 0 \leq x < 1 \\ 1 - 0.5e^{-0.5(x-1)}, & x \geq 1 \end{cases}$$

试求随机变量  $X$  的数学期望  $E(X)$  与方差  $D(X)$ .

$$\text{解: } p(x) = \begin{cases} 0.5e^x, & x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < 1 \\ 0.25e^{-0.5(x-1)}, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^0 x \cdot 0.5e^x dx + \int_1^{\infty} x \cdot 0.25e^{-0.5(x-1)} dx = 1$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^0 x^2 \cdot 0.5e^x dx + \int_1^{\infty} x^2 \cdot 0.25e^{-0.5(x-1)} dx = 7.5$$

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 6.5$$

28. 在制作某种食品时, 面粉所占的比率  $X$  的概率密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} 12x^2 - bx + 3, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求  $X$  的数学期望  $E(X)$  和方差  $D(X)$ .

$$\text{解: 由 } 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = \int_0^1 (12x^2 - bx + 3) dx = 6 - \frac{b}{2} \text{ 得, } b = 12$$

$$E(X) = \int_0^1 x(12x^2 - 12x + 3) dx = \frac{1}{2}$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2(12x^2 - 12x + 3) dx = \frac{2}{5}$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{3}{20}$$

29. 设随机变量  $X$  的概率密度为  $p(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ , 设  $Y = 2X$ ,  $Z = e^{-2X}$ , 求

$E(Y)$  和  $E(Z)$ .

$$\text{解: } E(Y) = 2E(X) = 2 \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = 2$$

$$E(Z) = E(e^{-2X}) = \int_0^{\infty} e^{-2x} \cdot e^{-x} dx = \int_0^{\infty} e^{-3x} dx = \frac{1}{3}$$

30. 已知  $E(X) = 5$ ,  $E(Y) = 3$ ,  $D(X) = 2$ ,  $D(Y) = 3$ , 且有  $E(XY) = 0$ , 求

$D(2X - 3Y)$ .

$$\text{解: } \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -15$$

$$D(2X - 3Y) = 4D(X) + 9D(Y) - 12\text{Cov}(X, Y) = 215$$

31. 设随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为

$$p(x, y) = \begin{cases} 6xy & 0 < x < 1, 0 < y < 2(1-x) \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求  $D(Y)$ ,  $E(X)$  和  $E(XY)$

$$\text{解: } E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{2(1-x)} 6x^2 y dy = \frac{2}{5}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y p(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{2(1-x)} 6xy^2 dy = \frac{4}{5}$$

$$E(Y^2) = \int_0^1 dx \int_0^{2(1-x)} 6xy^3 dy = \frac{4}{5}$$

$$D(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{4}{5} - \frac{16}{25} = \frac{4}{25}$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyp(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{2(1-x)} 6x^2 y^2 dy = \frac{4}{15}$$

32. 已知随机变量  $X$  与  $Y$  不相关, 且  $E(X) = E(Y) = 0$ ,  $D(X) = D(Y) = 1$ , 令  $U = X$ ,

$V = X + Y$ , 试求  $U$  与  $V$  的相关系数  $\rho_{UV}$ .

$$\text{解: } \rho_{UV} = \frac{\text{Cov}(U, V)}{\sqrt{D(U)}\sqrt{D(V)}} = \frac{\text{Cov}(X, X) + \text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(X) + D(Y)}} = \frac{1+0}{\sqrt{1}\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

33. 设二维随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{4}x^2y, & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求  $Cov(X, Y)$  和  $\rho_{XY}$  .

$$\text{解: } E(X) = \int_0^2 \left[ \int_0^1 x \cdot \frac{3}{4}x^2y dy \right] dx = \frac{3}{2}$$

$$E(Y) = \int_0^2 \left[ \int_0^1 y \cdot \frac{3}{4}x^2y dy \right] dx = \frac{2}{3}$$

$$E(XY) = \int_0^2 \left[ \int_0^1 xy \cdot \frac{3}{4}x^2y dy \right] dx = 1$$

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$$

$$\rho_{XY} = 0$$

34 . 设  $(X, Y)$  的联合分布密度为

$$p(x, y) = \begin{cases} 1 & |y| < x, 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

求  $X$  与  $Y$  的协方差矩阵  $C = \begin{bmatrix} Cov(X, X) & Cov(X, Y) \\ Cov(Y, X) & Cov(Y, Y) \end{bmatrix}$  .

$$\text{解: } E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_{-x}^x x dy dx = \frac{2}{3}$$

$$E(X^2) = \int_0^1 \int_{-x}^x x^2 dy dx = \frac{1}{2}$$

$$\therefore Cov(X, X) = D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{18}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} yp(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_{-x}^x y dy dx = 0$$

$$E(Y^2) = \int_0^1 \int_{-x}^x y^2 dx dy = \frac{2}{3} \int_0^1 y^3 dy = \frac{1}{6}$$

$$\therefore Cov(Y, Y) = D(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{1}{6}$$

$$\text{又 } E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyp(x, y) dx dy = \int_0^1 x \int_{-x}^x y dy dx = 0$$

于是，所求协方差矩阵为  $C = \begin{bmatrix} \frac{1}{18} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$