

第3章多维随机变量及其分布习题解答

一. 选择题

1. 设随机变量 (X, Y) 的联合分布函数为 $F(x, y)$, 则以下结论中错误的是(**B**) .

A . $F(-\infty, +\infty) = 0$. B . $F(+\infty, y) = 0$.

C . $F(-\infty, -\infty) = 0$. D . $F(+\infty, +\infty) = 1$.

2. 已知二维随机变量 (X, Y) 的联合分布函数 $F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$, 则事件 $P\{X > 2, Y > 3\} =$ (**D**) .

A . $F(2, 3)$. B . $F(2, +\infty) - F(2, 3)$.

C . $1 - F(2, 3)$. D . $1 - F(2, +\infty) - F(+\infty, 3) + F(2, 3)$.

3. 设 (X, Y) 的联合分布函数 $F(x, y)$, 其联合分布列如下表 , 则 $F(1, 1) =$ (**D**) .

| $X \backslash Y$ | 0 | 1 | 2 |
|------------------|-----|-----|-----|
| -1 | 0.2 | 0 | 0.1 |
| 0 | 0 | 0.4 | 0 |
| 1 | 0.1 | 0 | 0.2 |

A . 0.2 . B . 0.3 . C . 0.6 . D . 0.7 .

4. 设二维连续型随机变量的联合分布函数为 $F(x, y)$, 概率密度 $p(x, y)$, 则以下结论中错误的是(**A**) .

A . $F(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy$. B . $F(x, y) = \int_{-\infty}^x dx \int_{-\infty}^y p(x, y) dy$.

C . $F(-\infty, -\infty) = 0$ D . $F(+\infty, +\infty) = 1$.

5. 设 $F_X(x)$ 与 $F_Y(y)$ 分别为随机变量 X 和 Y 的分布函数 , 为使 $F(x) = aF_X(x) - bF_Y(x)$ 为某一随机变量的分布函数 , 在下列给定的各组数值中应取 (**A**) .

A . $a = \frac{3}{5}, b = -\frac{2}{5}$. B . $a = \frac{2}{3}, b = \frac{2}{3}$.

C . $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$. D . $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}$.

6. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合概率分布如下表, 则 $c =$ (**B**) .

| $X \backslash Y$ | 0 | 1 | 2 |
|------------------|--------|-------|--------|
| 1 | $1/6$ | $1/4$ | $1/12$ |
| 2 | $1/12$ | c | $1/4$ |

- A. $\frac{1}{12}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{1}{3}$.

7. 设二维随机向量 (X, Y) 的联合分布列如表, 则 $P(X=0) =$ (**D**) .

| $X \backslash Y$ | 0 | 1 | 2 |
|------------------|--------|--------|--------|
| 0 | $1/12$ | $2/12$ | $2/12$ |
| 1 | $1/12$ | $1/12$ | 0 |
| 2 | $2/12$ | $1/12$ | $2/12$ |

- A. $\frac{1}{12}$. B. $\frac{2}{12}$. C. $\frac{4}{12}$. D. $\frac{5}{12}$.

8. 设二维随机变量 (X, Y) 的分布律如表, 则 $P(XY=2) =$ (**C**) .

| $X \backslash Y$ | 1 | 2 | 3 |
|------------------|--------|--------|--------|
| 1 | $1/10$ | $2/10$ | $2/10$ |
| 2 | $3/10$ | $1/10$ | $1/10$ |

- A. $\frac{1}{5}$. B. $\frac{3}{10}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{3}{5}$.

9. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $p(x, y) = \begin{cases} c, & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 则

$c =$ (**A**) .

- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{2}$. C. 2 . D. 4 .

10. 设 (X, Y) 的联合概率密度为 $p(x, y) = \begin{cases} k(x+y), & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 则 $k =$

(**A**) .

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{2}$. C. 1 . D. 3 .

11. 设随机向量 (X, Y) 的联合概率密度为 $p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(6-x-y), & 0 < x < 2, 2 < y < 4 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$,

则 $P(X < 1, Y < 3) = (\text{A})$.

- A . $\frac{3}{8}$. B . $\frac{4}{8}$. C . $\frac{5}{8}$. D . $\frac{7}{8}$.

12 . 设二维随机向量 (X, Y) 的概率密度为 $p(x, y)$, 则 $P(X > 1) = (\text{B})$.

- A . $\int_{-\infty}^1 dx \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dy$. B . $\int_1^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dy$.
C . $\int_{-\infty}^1 p(x, y) dx$. D . $\int_1^{\infty} p(x, y) dx$.

13 . 设任意二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度函数 $p(x, y)$, 两个边缘概率密度函数分别为 $p_X(x)$ 和 $p_Y(y)$, 则以下结论正确的是 (C) .

- A . $p(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$. B . $p(x, y) = p_X(x) + p_Y(y)$.
C . $\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) dx = 1$. D . $\int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx = 1$.

14 . 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $p(x, y)$, 则 $P(X < Y) = (\text{B})$.

- A . $\int_y^{\infty} dx \int_x^{\infty} p(x, y) dy$. B . $\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_x^{\infty} p(x, y) dy$.
C . $\int_x^y p(x, y) dy$. D . $\int_x^y p(x, y) dx$.

15 . 设二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为

$$p(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

则 $P(X \geq Y) = (\text{B})$.

- A . $\frac{1}{4}$. B . $\frac{1}{2}$. C . $\frac{2}{3}$. D . $\frac{3}{4}$.

16 . 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$p(x, y) = \begin{cases} 4xy, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则当 $0 \leq x \leq 1$ 时, (X, Y) 关于 X 的边缘概率密度为 $p_X(x) = (\text{B})$.

- A . $\frac{1}{2x}$. B . $2x$. C . $\frac{1}{2y}$. D . $2y$.

17 . 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 它们的分布律分别如下表, 则 $P(X = Y) = (\text{C})$.

| | | |
|-----|-----|-----|
| X | 0 | 1 |
| P | 0.5 | 0.5 |

| | | |
|-----|-----|-----|
| Y | 0 | 1 |
| P | 0.5 | 0.5 |

A . 0 . B . 0.25 . C . 0.5 . D . 1 .

18 . 设 (X,Y) 的概率分布如下表所示 , 当 X 与 Y 相互独立时 , $(\alpha, \beta) = (\text{ C })$.

| | | | |
|------------------|----------|---------|------|
| $X \backslash Y$ | 0 | 1 | 2 |
| -1 | 1/15 | β | 1/5 |
| 1 | α | 1/5 | 3/10 |

A . $(\frac{1}{5}, \frac{1}{15})$. B . $(\frac{1}{15}, \frac{1}{5})$. C . $(\frac{1}{10}, \frac{2}{15})$. D . $(\frac{2}{15}, \frac{1}{10})$.

19 . 设随机变量 X 与 Y 相互独立 , 其分布律如下表 , 则下列各式正确的是 (**D**) .

| | | |
|-----|-----|-----|
| X | 0 | 2 |
| P | 0.5 | 0.5 |

| | | |
|-----|-----|-----|
| Y | 0 | 2 |
| P | 0.5 | 0.5 |

A . $X = Y$. B . $X + Y = 2X$.
C . $X - Y = 0$. D . $P\{X = Y\} = \frac{1}{2}$.

20 . 设随机变量 X 与 Y 相互独立 , 其分布律为 :

| | | |
|-----|-----|-----|
| X | -1 | 1 |
| P | 0.5 | 0.5 |

| | | |
|-----|-----|-----|
| Y | -1 | 1 |
| P | 0.5 | 0.5 |

则下列各式正确的是 (**C**) .

A . $P\{X = Y\} = 1$. B . $P\{X = Y\} = \frac{1}{4}$.
C . $P\{X = Y\} = \frac{1}{2}$. D . $P\{X = Y\} = 0$.

21 . 设随机变量 X 与 Y 相互独立 , 它们的概率密度分别为 $p_X(x)$ 和 $p_Y(y)$, 则

(X,Y) 的概率密度为 (**D**) .

A . $\frac{1}{2}[p_X(x) + p_Y(y)]$. B . $p_X(x) + p_Y(y)$.
C . $\frac{1}{2}p_X(x)p_Y(y)$. D . $p_X(x)p_Y(y)$.

22 . 设随机变量 X 与 Y 独立 , 分布函数分别为 $F(x), G(y)$, $Z = \max\{X, Y\}$, 则 Z 的

分布函数是 (**B**) .

- A . $\max\{F(z), G(z)\}$. B . $F(z)G(z)$.
 C . $F(z)+G(z)$. D . $[1-F(z)][1-G(z)]$.

23 . 设随机变量 X 与 Y 独立同分布 , 且 X 的分布函数为 $F(x)$, 则 $Z = \max\{X, Y\}$ 的分布函数为 (A) .

- A . $F^2(x)$. B . $F(x)F(y)$.
 C . $1-[1-F(x)]^2$. D . $[1-F(x)][1-F(y)]$.

24 . 设 $P\{X \leq 1, Y \leq 1\} = \frac{4}{9}$, $P\{X \leq 1\} = P\{Y \leq 1\} = \frac{5}{9}$, 则

$P\{\min\{X, Y\} \leq 1\} =$ (A) .

- A . $\frac{2}{3}$. B . $\frac{20}{81}$. C . $\frac{4}{9}$. D . $\frac{1}{3}$.

25 . 设 $P\{X \geq 0, Y \geq 0\} = \frac{3}{7}$, $P\{X \geq 0\} = P\{Y \geq 0\} = \frac{4}{7}$, 则

$P\{\max\{X, Y\} \geq 0\} =$ (C) .

- A . $\frac{3}{7}$. B . $\frac{4}{7}$. C . $\frac{5}{7}$. D . $\frac{6}{7}$.

二 . 填空题

26 . 设 (X, Y) 的联合分布律为

| $X \backslash Y$ | 0 | 1 | 2 |
|------------------|----------------|----------------|----------------|
| 0 | $\frac{1}{20}$ | $\frac{2}{20}$ | $\frac{1}{20}$ |
| 1 | $\frac{3}{20}$ | $\frac{6}{20}$ | $\frac{3}{20}$ |
| 2 | $\frac{1}{20}$ | $\frac{2}{20}$ | $\frac{1}{20}$ |

则 $P\{X = Y\} = \underline{\frac{8}{20}}$.

27 . 设 (X, Y) 的联合分布律为

| $X \backslash Y$ | -1 | 0 | 1 |
|------------------|---------------|---------------|---------------|
| -1 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |
| 0 | $\frac{1}{8}$ | 0 | $\frac{1}{8}$ |
| 1 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

则 $P\{XY = 0\} = \underline{\frac{1}{2}}$.

28 . 掷两颗均匀骰子 , X 与 Y 分别表示第一和第二颗骰子所出现点数 , 则 $P\{X=Y\}=\underline{\quad 1/6 \quad}$.

29 . 二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数 $F(x,y)$ 的定义是对任意实数 x,y , $F(x,y)=\underline{\quad P(X\leq x,Y\leq y) \quad}$.

30 . 设 (X,Y) 的联合分布函数为 $F(x,y)=\begin{cases} 1-e^{-x^2}-e^{-2y^2}+e^{-x^2-2y^2} & x\geq 0, y\geq 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$, 则 $P\{X>\sqrt{2}\}=\underline{\quad e^{-2} \quad}$.

31 . 设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数是 $F(x,y)$, 则关于 X 的边缘分布函数 $F_X(x)=\underline{\quad F(x,\infty) \quad}$.

32 . 设 (X,Y) 的概率密度为 $p(x,y)=\begin{cases} kxye^{-(x^2+y^2)}, & x\geq 0, y\geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 则常数 $k=\underline{\quad 4 \quad}$.

33 . 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数是 $p(x,y)$, 则关于 X 的边缘分布密度 $p_X(x)=\underline{\quad \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dy \quad}$.

34 . 二维离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为 $P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij}$ ($i,j=1,2,\cdots$) , 关于 X 及关于 Y 的边缘分布律为 $p_{i\cdot}$ 及 $p_{\cdot j}$ ($i,j=1,2,\cdots$) , 则 X 与 Y 相互独立的充要条件是 $\underline{\quad p_{ij}=p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j} \quad (i,j=1,2,\cdots)}$.

35 . 设 X 与 Y 相互独立 , 分布函数分别为 $F_X(x)=\begin{cases} 1-e^{-x^2} & x\geq 0 \\ 0 & x< 0 \end{cases}$, $F_Y(y)=\begin{cases} 1-e^{-2y^2} & y\geq 0 \\ 0 & y< 0 \end{cases}$, 则 (X,Y) 的联合分布函数为 $\underline{\quad F(x,y)=\begin{cases} (1-e^{-x^2})(1-e^{-2y^2}) & x\geq 0, y\geq 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad}$.

36 . 设 (X,Y) 的联合分布密度 $p(x,y)=\begin{cases} 2e^{-(2x+y)} & x>0,y>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$, 则

$$P\{X>1,Y>2\}=\underline{e^{-4}} .$$

37 . 设 X_1,X_2,X_3 相互独立 , 且 $P\{X_i>x\}=\frac{1}{\left(1+\frac{x}{2}\right)^2}$ $0\leq x<+\infty, i=1,2,3$, 则

$$P\{X_1>4,X_2>4,X_3>4\}=\underline{\frac{1}{729}} .$$

38 . 设 X 与 Y 相互独立 , 且 $P\{X=0\}=P\{Y=0\}=\frac{1}{3}, P\{X=1\}=P\{Y=1\}=\frac{2}{3}$,

$$Z=\begin{cases} 1 & X+Y\neq 1 \\ 0 & X+Y=1 \end{cases} , \text{ 则 } Z \text{ 的分布律为 } \underline{P(Z=0)=4/9, P(Z=1)=5/9} .$$

39 . 设随机变量 X 与 Y 相互独立 , 且 X 的分布函数为 $F_X(x)$, Y 的分布函数为 $F_Y(y)$,

$$\text{则随机变量 } Z=\min\{X,Y\} \text{ 的分布函数为 } F(z)=\underline{1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]} .$$

40 . 二 维 离 散 型 随 机 变 量 (X,Y) 的 联 合 分 布 律 为

$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij} (i,j=1,2,\cdots)$, 关于 X 及关于 Y 的边缘分布律为 $p_{i\cdot}$ 及 $p_{\cdot j}$ $(i,j=1,2,\cdots)$, 若 $p_{\cdot j}>0$ 则在 $Y=y_j$ 的条件下 , 关于 X 的条件分布律

$$P\{X=x_i|Y=y_j\}=\underline{\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}} \quad (i=1,2,\cdots) .$$

41 . 在整数 0 至 9 中先取一数 X 后不放回再取一数 Y , 则在 $Y=k(0\leq k\leq 9)$ 的条件下 X

$$\text{的分布律为 } P\{X=i|Y=k\}=\underline{\begin{cases} \frac{1}{9} & i\neq k \\ 0 & i=k \end{cases} \quad i=0,1,\cdots,9} .$$

三 . 应用计算题

42 . 现有 10 件产品 , 其中 6 件正品 , 4 件次品 . 从中随机抽取 2 次 , 每次抽取 1 件 , 取后不放回 . 定义两个随机变量 X, Y 如下 :

$$X=\begin{cases} 1, & \text{第1次抽到正品} \\ 0, & \text{第1次抽到次品} \end{cases}, Y=\begin{cases} 1, & \text{第2次抽到正品} \\ 0, & \text{第2次抽到次品} \end{cases}$$

试求 (X, Y) 的联合概率分布和边缘概率分布 .

解 : $P(X=0, Y=0) = P(X=0)P(Y=0|X=0) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$, 类似地可得 (X, Y) 的

联合概率分布和边缘概率分布如下表

| $X \backslash Y$ | 0 | 1 | $P(X=i)$ |
|------------------|----------------|----------------|----------------|
| 0 | $\frac{2}{15}$ | $\frac{4}{15}$ | $\frac{6}{15}$ |
| 1 | $\frac{4}{15}$ | $\frac{5}{15}$ | $\frac{9}{15}$ |
| $P(Y=j)$ | $\frac{6}{15}$ | $\frac{9}{15}$ | |

43. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率分布为

| $Y \backslash X$ | -1 | 0 | 1 |
|------------------|------|------|------|
| 0 | 0.07 | 0.18 | 0.15 |
| 1 | 0.08 | 0.32 | 0.2 |

求 (1) X 与 Y 的边缘分布律 ; (2) 判断 X 与 Y 是否独立 , 说明理由 .

解 : (1) X 与 Y 的边缘分布律如下表

| $Y \backslash X$ | -1 | 0 | 1 | $P\{Y=j\}$ |
|------------------|------|------|------|------------|
| 0 | 0.07 | 0.18 | 0.15 | 0.4 |
| 1 | 0.08 | 0.32 | 0.2 | 0.6 |
| $P\{X=i\}$ | 0.15 | 0.5 | 0.35 | |

(2) 由于 $P\{X=-1, Y=0\} = 0.07 \neq P\{X=-1\}P\{Y=0\} = 0.15 \times 0.4$, 所以 X 与 Y 不独立 .

44 . 设两个独立的随机变量 X 和 Y 的分布律如下表 :

| X | 1 | 2 |
|-------|-----|-----|
| P_X | 0.3 | 0.7 |

| Y | 1 | 2 |
|-------|-----|-----|
| P_Y | 0.6 | 0.4 |

(1) 求随机变量 (X, Y) 的分布律 ; (2) 求 $P\{X=Y\}$; (3) 求 XY 的分布律 .

解 : (1) 求随机变量 (X, Y) 的分布律为

| $X \backslash Y$ | 1 | 2 | $P(X=i)$ |
|------------------|---|---|----------|
| | | | |

| | | | |
|----------|------|------|-----|
| 1 | 0.18 | 0.12 | 0.3 |
| 2 | 0.42 | 0.28 | 0.7 |
| $P(Y=j)$ | 0.6 | 0.4 | |

$$(2) P\{X=Y\} = P\{X=Y=1\} + P\{X=Y=2\} = 0.18 + 0.28 = 0.46$$

(3) XY 的分布律为

| | | | |
|------|------|------|------|
| XY | 1 | 2 | 4 |
| P | 0.18 | 0.54 | 0.28 |

45. 设 (X, Y) 的联合分布律为如下表, 问 α 与 β 取什么值时, X 与 Y 相互独立?

| $X \backslash Y$ | 1 | 2 | 3 |
|------------------|-----|----------|---------|
| 1 | 1/6 | 1/9 | 1/18 |
| 2 | 1/3 | α | β |

解: X 与 Y 的边缘分布律如下表

| $X \backslash Y$ | 1 | 2 | 3 | $P(X=i)$ |
|------------------|-----|----------------|----------------|------------------------|
| 1 | 1/6 | 1/9 | 1/18 | 1/3 |
| 2 | 1/3 | α | β | $\alpha + \beta + 1/3$ |
| $P(Y=j)$ | 1/2 | $\alpha + 1/9$ | $\beta + 1/18$ | |

由于要求 X 与 Y 相互独立, 所以有

$$P(X=1, Y=2) = P(X=1)P(Y=2), \text{ 即 } \frac{1}{9} = \frac{1}{3} \left(\alpha + \frac{1}{9} \right)$$

$$P(X=1, Y=3) = P(X=1)P(Y=3), \text{ 即 } \frac{1}{18} = \frac{1}{3} \left(\beta + \frac{1}{18} \right)$$

$$\text{解得 } \begin{cases} \alpha = 2/9 \\ \beta = 1/9 \end{cases}$$

46. 设 (X, Y) 的联合密度函数为 $p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$, 求 X 与 Y 中至少

有一个小于 $\frac{1}{2}$ 的概率 .

解: X 与 Y 中至少有一个小于 $\frac{1}{2}$ 的概率为

$$\begin{aligned} P(\{X < 1/2\} \cup \{Y < 1/2\}) &= 1 - P\left\{X \geq \frac{1}{2}, Y \geq \frac{1}{2}\right\} \\ &= 1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{2} dx dy = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

47. 设 (X, Y) 的联合概率密度为 $p(x, y) = \begin{cases} Ae^{-(x+2y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, (1) 求常数 A ;

(2) 求 $P\{X + 2Y \leq 1\}$.

解: (1) 由 $A \int_0^\infty \left[\int_0^\infty e^{-(x+2y)} dy \right] dx = 1$ 得 $A = 2$

$$(2) P\{X + 2Y \leq 1\} = \iint_{x+2y \leq 1} p(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} 2e^{-(x+2y)} dy = 1 - 2e^{-1}$$

48. 设 X 与 Y 相互独立, X 与 Y 的概率密度分别为

$$p_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \quad p_Y(y) = \begin{cases} 8y, & 0 < y < 1/2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) (X, Y) 的联合概率密度 $p(x, y)$; (2) 求 $P\{X > Y\}$.

解: (1) 由于 X 与 Y 相互独立, 所以 (X, Y) 的联合概率密度 $p(x, y)$ 为

$$p(x, y) = p_X(x)p_Y(y) = \begin{cases} 8y, & 0 \leq x \leq 1, 0 < y < 1/2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$(2) P\{X > Y\} = \int_0^{1/2} \left[\int_y^1 8y dx \right] dy = \frac{2}{3}$$

49. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为

$$p(x, y) = \begin{cases} Ay^2, & 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}.$$

(1) 求常数 A ; (2) 求概率 $P\{X \leq 1/2\}$; (3) 求关于 X 的边缘概率密度 $p_X(x)$; (4) 判

断 X 与 Y 是否独立, 给出理由 .

解: (1) 由 $A \int_0^1 \left[\int_0^x y^2 dy \right] dx = 1$ 得 $A = 12$

$$(2) P\{X \leq 1/2\} = 12 \int_0^{1/2} \left[\int_0^x y^2 dy \right] dx = \frac{1}{16}$$

$$(3) p_X(x) = \begin{cases} 12 \int_0^x y^2 dy, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} 4x^3, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$(4) p_Y(y) = \begin{cases} 12 \int_y^1 y^2 dx, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} 12y^2(1-y), & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

因为 $p(x, y) \neq p_X(x) \cdot p_Y(y)$ ，所以 X 与 Y 不独立。

50. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，其中 X 的分布律如下表，而 Y 的概率密度 $p_Y(y)$

为已知，求 $U = XY$ 的概率密度 $p_U(u)$ 。

| | | |
|-----|-----|-----|
| X | 2 | 3 |
| P | 0.2 | 0.8 |

解： $U = XY$ 的分布函数为

$$F_U(u) = P(XY \leq u) = P(X=2)P(Y \leq u/2 | X=2) + P(X=3)P(Y \leq u/3 | X=3)$$

$$= 0.2P(Y \leq u/2) + 0.8P(Y \leq u/3) = 0.2F_Y(u/2) + 0.8F_Y(u/3)$$

$U = XY$ 的概率密度 $p_U(u)$ 为

$$p_U(u) = F'_U(u) = 0.2p_Y(u/2) \cdot (u/2)' + 0.8p_Y(u/3) \cdot (u/3)'$$

$$= \frac{1}{10}p_Y(u/2) + \frac{4}{15}p_Y(u/3)$$

51. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，它们的联合概率密度为

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{2}e^{-3x}, & x > 0, 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 求边缘概率密度 $p_X(x), p_Y(y)$ ；(2) 求 $Z = \max\{X, Y\}$ 的分布函数；(3) 求概率

$P\{1/2 < Z \leq 1\}$ 。

$$\text{解：(1) } p_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^2 \frac{3}{2}e^{-3x} dy, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 3e^{-3x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, \text{ 类似}$$

$$p_Y(y) = \begin{cases} 1/2, & 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$(2) \text{ 可求得 } F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-3x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ y/2, & 0 \leq y \leq 2 \\ 1, & y > 2 \end{cases}, \text{ 所以}$$

$Z = \max\{X, Y\}$ 的分布函数为

$$F_Z(z) = F_X(z)F_Y(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \frac{z}{2}(1 - e^{-3z}), & 0 \leq z \leq 2 \\ (1 - e^{-3z}), & z > 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad P\{1/2 < Z \leq 1\} &= F_Z(1) - F_Z(1/2) = \frac{1}{2}(1 - e^{-3}) - \frac{1}{4}(1 - e^{-3/2}) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-3/2} - \frac{1}{2}e^{-3} \end{aligned}$$