

## 第2章随机变量及其分布习题解答

### 一. 选择题

1. 若定义分布函数  $F(x) = P\{X \leq x\}$ , 则函数  $F(x)$  是某一随机变量  $X$  的分布函数的充要条件是( D ).

A.  $0 \leq F(x) \leq 1$ .

B.  $0 \leq F(x) \leq 1$ , 且  $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$ .

C.  $F(x)$  单调不减, 且  $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$ .

D.  $F(x)$  单调不减, 函数  $F(x)$  右连续, 且  $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$ .

2. 函数  $F(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ \frac{1}{2} & -2 \leq x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$  是( A ).

A. 某一离散型随机变量  $X$  的分布函数.

B. 某一连续型随机变量  $X$  的分布函数.

C. 既不是连续型也不是离散型随机变量的分布函数.

D. 不可能为某一随机变量的分布函数.

3. 函数  $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \sin x & 0 \leq x < \pi \\ 1 & x \geq \pi \end{cases}$  ( D ).

A. 是某一离散型随机变量的分布函数.

B. 是某一连续型随机变量的分布函数.

C. 既不是连续型也不是离散型随机变量的分布函数.

D. 不可能为某一随机变量的分布函数.

4. 设  $X$  的分布函数为  $F_1(x)$ ,  $Y$  的分布函数为  $F_2(x)$ , 而  $F(x) = aF_1(x) - bF_2(x)$  是某随机变量  $Z$  的分布函数, 则  $a, b$  可取( A ).

A.  $a = \frac{3}{5}, b = -\frac{2}{5}$ . B.  $a = b = \frac{2}{3}$ . C.  $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$ . D.  $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}$ .

5. 设  $X$  的分布律为

$X$	0	1	2
$P$	0.25	0.35	0.4

而  $F(x) = P\{X \leq x\}$ , 则  $F(\sqrt{2}) = ( \text{A} )$ .

A. 0.6.      B. 0.35.      C. 0.25.      D. 0.

6. 设连续型变量  $X$  的概率密度为  $p(x)$ , 分布函数为  $F(x)$ , 则对于任意  $x$  值有( A ).

A.  $P(X=0)=0$ .      B.  $F'(x)=p(x)$ .

C.  $P(X=x)=p(x)$ .      D.  $P(X=x)=F(x)$ .

7. 任一个连续型的随机变量  $X$  的概率密度为  $p(x)$ , 则  $p(x)$  必满足( C ).

A.  $0 \leq p(x) \leq 1$ .      B. 单调不减.      C.  $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$ .      D.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = 1$ .

8. 为使  $p(x) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{1-x^2}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$  成为某个随机变量  $X$  的概率密度, 则  $c$  应满足

( B ).

A.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{\sqrt{1-x^2}} dx = 1$ .      B.  $\int_{-1}^1 \frac{c}{\sqrt{1-x^2}} dx = 1$ .

C.  $\int_0^1 \frac{c}{\sqrt{1-x^2}} dx = 1$ .      D.  $\int_{-1}^{+\infty} \frac{c}{\sqrt{1-x^2}} dx = 1$ .

9. 设随机变量  $X$  的概率密度为  $p(x) = Ae^{-\frac{|x|}{2}}$ , 则  $A = ( \text{D} )$ .

A. 2.      B. 1.      C.  $\frac{1}{2}$ .      D.  $\frac{1}{4}$ .

10. 设  $X$  的概率密度函数为  $p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ ,  $-\infty < x < +\infty$ , 又  $F(x) = P\{X \leq x\}$ , 则

$x < 0$  时,  $F(x) = ( \text{D} )$ .

A.  $1 - \frac{1}{2}e^x$ .      B.  $1 - \frac{1}{2}e^{-x}$ .      C.  $\frac{1}{2}e^{-x}$ .      D.  $\frac{1}{2}e^x$ .

11. 设  $p(x) = \begin{cases} \frac{x}{c}e^{-\frac{x^2}{2c}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$  是随机变量  $X$  的概率密度, 则常数  $c$  ( B ).

A. 可以是任意非零常数. B. 只能是任意正常数. C. 仅取 1. D. 仅取 -1.

12. 设连续型随机变量  $X$  的分布函数为  $F(x)$ , 则  $Y = 1 - \frac{1}{2}X$  分布函数为( D ).

A.  $F(2-2y)$ . B.  $\frac{1}{2}F(1-\frac{y}{2})$ . C.  $2F(2-2y)$ . D.  $1-F(2-2y)$ .

13. 设随机变量  $X$  的概率密度为  $p(x)$ ,  $Y = 1 - 2X$ , 则  $Y$  的分布密度为( A ).

A.  $\frac{1}{2}p\left(\frac{1-y}{2}\right)$ . B.  $1-p\left(\frac{1-y}{2}\right)$  C.  $-p\left(\frac{y-1}{2}\right)$ . D.  $2p(1-2y)$ .

14. 设随机变量  $X$  的密度函数  $p(x)$  是连续的偶函数(即  $p(x) = p(-x)$ ), 而  $F(x)$  是  $X$  的分布函数, 则对任意实数  $a$  有( C ).

A.  $F(a) = F(-a)$ . B.  $F(-a) = 1 - \int_0^a p(x)dx$ .

C.  $F(-a) = \frac{1}{2} - \int_0^a p(x)dx$ . D.  $F(-a) = F(a)$ .

## 二. 填空题

15. 欲使  $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^x & x < 0 \\ A - \frac{1}{3}e^{-2x} & x \geq 0 \end{cases}$  为某随机变量的分布函数, 则要求  $A = \underline{1}$ .

16. 若随机变量  $X$  的分布函数  $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ Ax^2 & 0 \leq x < 6 \\ 1 & x \geq 6 \end{cases}$ , 则必有  $A = \underline{1/36}$ .

17. 从装有 4 件合格品及 1 件次品的口袋中连取两次, 每次取一件, 取出后不放回, 求取出次品数  $X$  的分布律为  $\underline{P\{X=0\}=3/5, P\{X=1\}=2/5}$ .

18. 独立重复地掷一枚均匀硬币, 直到出现正面为止, 设  $X$  表示首次出现正面的试验次数, 则  $X$  的分布列  $P\{X=k\} = \underline{P\{X=k\} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^k, k=1, 2, \dots}$ .

19. 设某离散型随机变量  $X$  的分布列是  $P\{X=k\} = \frac{k}{C}, k=1, 2, \dots, 10$ , 则  $C = \underline{55}$ .

20. 设离散型随机变量  $X$  的分布函数是  $F(x) = P\{X \leq x\}$ , 用  $F(x)$  表示概率  $P\{X=x_0\} = \underline{F(x_0) - F(x_0-0)}$ .

21. 设  $X$  是连续型随机变量, 则  $P\{X=3\}=\underline{0}$  .

22. 设随机变量  $X$  的分布函数为  $F(x)=\begin{cases} 0, & x < 2 \\ (x-2)^2, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$ , 则

$$P(2.5 < X \leq 4) = \underline{F(4) - F(2.5) = 0.75} .$$

23. 设随机变量  $X$  的分布函数  $F(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}e^x & x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & x > 0 \end{cases}$ , 则

$$P\{|X| < 1\} = \underline{1 - e^{-1}} .$$

24. 设连续型随机变量  $X$  的分布函数为  $F(x)=\begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2}{2} & 0 \leq x < \sqrt{2} \\ 1 & x \geq \sqrt{2} \end{cases}$ , 则  $X$  的概率密度

$$p(x) = \underline{\begin{cases} x & 0 \leq x \leq \sqrt{2} \\ 0 & \text{(其它)} \end{cases}} .$$

25. 设随机变量  $X$  的分布密度为  $p(x)=\begin{cases} Ax(1-x)^2, & x \in (0,1) \\ 0, & x \notin (0,1) \end{cases}$ , 则常数  $A = \underline{12}$  .

26. 若  $X$  的概率密度为  $p(x)$ , 则  $Y=3X+1$  的概率密度

$$p_Y(y) = \underline{\frac{1}{3}p\left(\frac{y-1}{3}\right)} .$$

27. 设电子管使用寿命的密度函数  $p(x)=\begin{cases} \frac{100}{x^2} & x > 100 \\ 0 & x \leq 100 \end{cases}$  (单位: 小时), 则在 150

小时内独立使用的三只管子中恰有一个损坏的概率为 4/9 .

### 三. 应用计算题

28. 设随机变量  $X$  的分布律为

$X$	0	1	2	3	4
$P$	0.1	0.2	0.3	0.3	0.1

求 (1)  $P\{1 < X \leq 4\}$ ; (2)  $X$  的分布函数  $F(x)$  .

解：(1)  $P\{1 < X \leq 4\} = P\{X = 2\} + P\{X = 3\} + P\{X = 4\} = 0.3 + 0.3 + 0.1 = 0.7$

$$(2) X \text{ 的分布函数 } F(x) \text{ 为 } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.1, & 0 \leq x < 1 \\ 0.3, & 1 \leq x < 2 \\ 0.6, & 2 \leq x < 3 \\ 0.9, & 3 \leq x < 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases}$$

29. 设连续随机变量  $X$  的概率密度

$$p(x) = \begin{cases} c+x, & -1 \leq x < 0 \\ c-x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

试求：(1) 常数  $c$ ；(2) 概率  $P\{|X| \leq 0.5\}$ ；(3)  $X$  的分布函数  $F(x)$ 。

解：(1) 由  $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int_{-1}^0 (c+x)dx + \int_0^1 (c-x)dx = 2c-1$ ，得  $c=1$

$$(2) P\{|X| \leq 0.5\} = P\{-0.5 \leq X \leq 0.5\} = \int_{-0.5}^0 (1+x)dx + \int_0^{0.5} (1-x)dx = 0.75$$

(3)  $X$  的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \int_{-1}^x (1+t)dt, & -1 \leq x < 0 \\ \int_{-1}^0 (1+t)dt + \int_0^x (1-t)dt, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{1}{2}(1+x)^2, & -1 \leq x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}(1-x)^2, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

30. 设顾客到某银行窗口等待服务的时间  $X$  (单位：分钟) 的概率密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

某顾客在窗口等待，如超过 10 分钟，他就离开，求他离开的概率。

解：他离开的概率为  $P\{X \geq 10\} = \int_{10}^{+\infty} \frac{1}{5}e^{-x/5}dx = e^{-2}$

$$31. \text{ 已知随机变量 } X \text{ 的分布函数为 } F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x, & x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x, & 0 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases} \text{ 求其分布密度 } p(x).$$

$$\text{解: } p(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x & x < 0 \\ \frac{1}{4} & 0 \leq x < 2 \\ 0 & x \geq 2 \end{cases}$$

32. 设  $X$  是离散型随机变量, 其分布律为

$X$	- 1	0	1	2	3
$P$	0.3	$3a$	$a$	0.1	0.2

(1) 求常数  $a$ ; (2)  $Y = 2X + 3$  的分布律.

解: (1) 由  $0.3 + 3a + a + 0.1 + 0.2 = 1$  得  $a = 0.1$

(2) 由于

$X$	- 1	0	1	2	3
$Y$	1	3	5	7	9
$P$	0.3	0.3	0.1	0.1	0.2

所以,  $Y = 2X + 3$  的分布律为

$Y$	1	3	5	7	9
$P$	0.3	0.3	0.1	0.1	0.2

33. 设随机变量  $X$  的密度函数为  $p_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ ,  $\lambda > 0$ , 求  $Y = e^X$  的密度

函数  $p_Y(y)$ .

解: (1)  $Y = e^X$  的分布函数为

$$F_Y(y) = P(e^X \leq y) = P(X \leq \ln y) = \begin{cases} F_X(\ln y), & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

(2)  $Y = e^X$  的密度函数  $p_Y(y)$  为

$$p_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} p_X(\ln y) \cdot (\ln y)', & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases} = \frac{1}{y} \cdot \begin{cases} \lambda e^{-\lambda \ln y}, & \ln y > 0 \\ 0, & \ln y \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\lambda}{y^{\lambda+1}}, & y > 1 \\ 0, & y \leq 1 \end{cases}$$