



第9章 时间序列的建模分析基础

9.1 时间序列模型的动态特性

9.2 时间序列建模

作者：李鹏波、胡德文

单位：国防科技大学机电工程与自动化学院

Email: gaoxia73@163.com

中国水利水电出版社版权所有



9.1 时间序列模型的动...

2. 逆函数

3. 自相关函数

4. 偏自相关函数

9.2 时间序列建模

Home Page

Title Page



Page 1 of 21

Go Back

Full Screen

Close

Quit



有一类很重要的系统不能完全用经典的方法进行建模。例如，在生物系统中的各种生物电数据(心电、脑电、肌电等)；气象学中的气温、降雨量、雾、霜期、灾害天气次数等数据；太阳黑子数，地震次数、强度等；车辆、机床的振动幅度、振动频率、使用寿命等数据；社会经济系统中的产品需求量、市场价格、物流量等；以及传染性疾病的发病率等等。

以上观测数据的共同特点：一是这些量可看作是动态系统的输出；二是这些随时间变化的观测值之间是相关的，即任何时刻的观测值受过去观测值的影响。相关性是进行统计分析研究的基础，因为没有相关性的序列(如白噪声)是不能预测的。

把一组观测数据按时间排序的序列称为“时间序列”，这里的数据是指均匀时间间隔采样得到的离散序列。由于时间序列只有输出观测值，所以很难用前面介绍的方法建模和辨识。这里介绍动态系统分析方法(DDS)来建模，建立的模型应用于外推预测是很方便的。

9.1 时间序列模型的动...

2. 逆函数

3. 自相关函数

4. 偏自相关函数

9.2 时间序列建模

Home Page

Title Page

« »

◀ ▶

Page 2 of 21

Go Back

Full Screen

Close

Quit



第9章 时间序列的建模分析基础

9.1 时间序列模型的动态特性

1. 格林函数

2. 逆函数

3. 自相关函数

4. 偏自相关函数

9.2 时间序列建模

9.1 时间序列模型的动...

2. 逆函数

3. 自相关函数

4. 偏自相关函数

9.2 时间序列建模

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 3 of 21

Go Back

Full Screen

Close

Quit

9.1 时间序列模型的动态特性

由一串随机变量 x_1, x_2, x_3, \dots 构成的序列，用 x_t ($t = 1, 2, 3, \dots$)或 $\{x_t\}$ 表示。如果下标 t 是整数变量，它代表着等间隔的时刻增长量，如第 t 时、第 t 天、第 t 次等，我们就称这种随机序列为时间序列，而整数变量 t 即认为是指某时刻。

对于时间序列 $\{x_t\}$ ，如果具有有理谱密度，则可认为是线性定常系统在白噪声 ε_t 作用下的输出序列。该系统的离散传递函数为

$$G(z^{-1}) = \frac{1 - \theta_1 z^{-1} - \dots - \theta_m z^{-m}}{1 - \varphi_1 z^{-1} - \dots - \varphi_n z^{-n}} = \frac{\theta(z^{-1})}{\varphi(z^{-1})} \quad (1)$$

式中 z^{-1} 为后向移位算子，上式写为差分方程的形式

$$x_t - \varphi_1 x_{t-1} - \dots - \varphi_n x_{t-n} = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_m \varepsilon_{t-m} \quad (2)$$

上式称为 $ARMA(n, m)$ 模型。上式和式(??)在形式上是一致的，只是记法上有区别，不同的学科有各自的习惯用法。本章用 B 来表示后移算子，这与前面用 z^{-1} 表示有所区别。



9.1 时间序列模型的动...

2. 逆函数

3. 自相关函数

4. 偏自相关函数

9.2 时间序列建模

Home Page

Title Page

« »

◀ ▶

Page 4 of 21

Go Back

Full Screen

Close

Quit



首先研究平稳时间序列的建模问题。从系统的观点看， $\varphi(z)$ 的根是系统的极点，为了保证系统是稳定的，极点必须在单位圆内，而为了保证系统是最小相位的，还需要系统的零点也在单位圆内。

1. 格林函数

格林函数用符号 G_j 表示，它把 x_t 表示成 ε_t 及其以往值 ε_i 的线性组合，表达式为

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} G_j \varepsilon_{t-j} \quad (3)$$

其中， $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_{\varepsilon}^2)$ 为独立同分布的正态白噪声序列； $G_0 = 1$ ， G_j 为格林函数。

令 $x_{t-1} = Bx_t$ ， B 为后移算子，则上式为

$$x_t = \left(\sum_{j=0}^{\infty} G_j B^j \right) \varepsilon_t \quad (4)$$

9.1 时间序列模型的动...

2. 逆函数

3. 自相关函数

4. 偏自相关函数

9.2 时间序列建模

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 5 of 21

Go Back

Full Screen

Close

Quit



一般，如果ARMA模型已知，则可作长除法直接得到格林函数的值。即

$$\begin{aligned}x_t &= \frac{\theta(B)}{\varphi(B)}\varepsilon_t \\ &= (1 + G_1B + G_2B^2 + \cdots)\varepsilon_t\end{aligned}\quad (5)$$

格林函数的物理意义有二种解释。首先，从展开式看出， G_j 是 j 个时间单位以前加入系统的冲击或扰动 ε_{t-j} 对现在响应的权重。其次，格林函数表示了系统对 ε_{t-j} 有多大的记忆，或者系统对 ε_t 的动态响应衰减的快慢。当系统的输入以单位脉冲 δ_i 取代 ε_i 时，有

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} G_j \delta_{t-j} = G_t \quad (6)$$

可见， G_j 就是单位脉冲响应函数。

9.1 时间序列模型的动...

2. 逆函数

3. 自相关函数

4. 偏自相关函数

9.2 时间序列建模

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 6 of 21

Go Back

Full Screen

Close

Quit



9.1 时间序列模型的动...

2. 逆函数

3. 自相关函数

4. 偏自相关函数

9.2 时间序列建模

例9.1 求 $AR(1)$ 模型的格林函数

$$x_t - \varphi_1 x_{t-1} = \varepsilon_t \quad (7)$$

利用后移算子，则上式写为 $x_t - \varphi_1 B x_t = \varepsilon_t$,

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{1}{1 - \varphi_1 B} \varepsilon_t = (1 + \varphi_1 B + \varphi_1^2 B^2 + \cdots) \varepsilon_t \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_1^j \varepsilon_{t-j} = \sum_{j=0}^{\infty} G_j \varepsilon_{t-j} \end{aligned} \quad (8)$$

式中 $G_j = \varphi_1^j$ ，即 $AR(1)$ 模型的格林函数。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 7 of 21

Go Back

Full Screen

Close

Quit



9.1 时间序列模型的动...

2. 逆函数

3. 自相关函数

4. 偏自相关函数

9.2 时间序列建模

例9.2 求 $ARMA(1, 1)$ 模型的格林函数

$$x_t = \varphi_1 x_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} \quad (9)$$

利用长除法，则上式为

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{1 - \theta_1 B}{1 - \varphi_1 B} \varepsilon_t \\ &= 1 + (\varphi_1 - \theta_1)B + (\varphi_1 - \theta_1)\varphi_1 B^2 + (\varphi_1 - \theta_1)\varphi_1^2 B^3 + \dots \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (\varphi_1 - \theta_1)\varphi_1^{j-1} \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} G_j \varepsilon_{t-j} \end{aligned} \quad (10)$$

所以， $ARMA(1, 1)$ 模型的格林函数为

$$G_j = \begin{cases} (\varphi_1 - \theta_1)\varphi_1^{j-1} & j \geq 1 \\ 1 & j = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 8 of 21

Go Back

Full Screen

Close

Quit



2. 逆函数

格林函数表示了系统对既往的 ε_t 的记忆或动态，即表明 ε_t 是怎样影响着响应 x_t 的。

$ARMA$ 系统的动态也可以通过将 x_t 表示为既往的 x_t 的线性组合。这种展开式中的系数称为逆函数，记作 I_j 。

$$x_t = \sum_{j=1}^{\infty} I_j x_{t-j} + \varepsilon_t \quad (12)$$

或

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= x_t - \sum_{j=1}^{\infty} I_j x_{t-j} \\ &= (1 - I_1 B - I_2 B^2 - \cdots) x_t = \sum_{j=0}^{\infty} (-I_j) B^j x_t \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (-I_j) x_{t-j}, \quad (I_0 = -1) \end{aligned} \quad (13)$$

9.1 时间序列模型的动...

2. 逆函数

3. 自相关函数

4. 偏自相关函数

9.2 时间序列建模

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 9 of 21

Go Back

Full Screen

Close

Quit



9.1 时间序列模型的动...

2. 逆函数

3. 自相关函数

4. 偏自相关函数

9.2 时间序列建模

例9.3 求 $AR(1)$ 模型的逆函数

由 $x_t = \varphi_1 x_{t-1} + \varepsilon_t$ ，即 $\varepsilon_t = x_t - \varphi_1 x_{t-1}$ ，根据逆函数的定义得 $I_1 = \varphi_1$ ， $I_j = 0, j > 1$ 。

例9.4 求 $MA(1)$ 模型的逆函数

由 $x_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$ ，即 $x_t = (1 - \theta_1 B)\varepsilon_t$ ，得

$$\varepsilon_t = \frac{1}{1 - \theta_1 B} x_t = (1 + \theta_1 B + \theta_1^2 B^2 + \cdots) x_t \quad (14)$$

所以，逆函数为 $I_j = -\theta_1^j$ 。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 10 of 21

Go Back

Full Screen

Close

Quit



9.1 时间序列模型的动...

2. 逆函数

3. 自相关函数

4. 偏自相关函数

9.2 时间序列建模

3. 自相关函数

格林函数和逆函数是从系统的角度来表征ARMA模型的。用统计的方法建立起来的自相关函数，同样也可表征ARMA模型。

定义9.1 x_t 的时延为 k 的自协方差定义为

$$r_k = E\{x_t x_{t-k}\} \quad (15)$$

其中 x_t, x_{t-k} 是减去平均值后的值。当 $k = 0$ 时，即得到 x_t 的方差。用 r_k 除以方差 r_0 便得到时延 k 时的自相关函数。

$$\rho_k = r_k / r_0 \quad (16)$$

注意 $\rho_0 = 1$ 。 r_k 或 ρ_k 表示 x_t 和 x_{t-k} 之间的相关性， r_k, ρ_k 又称为理论自协方差函数和理论自相关函数。当得到时间序列的一个样本，就可以求出自相关函数的估计值。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 11 of 21

Go Back

Full Screen

Close

Quit



定义9.2 平稳序列的样本自协方差函数为

$$\hat{r}_k = \frac{1}{N-k} \sum_{t=k+1}^N x_t x_{t-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, p \quad (17)$$

其中 x_t 是减去均值以后的观测数据。

定义9.3 平稳序列的样本自相关函数为

$$\hat{\rho}_k = \hat{r}_k / \hat{r}_0 \quad (18)$$

自协方差函数可以用一个样本的观测数据来估计，而无需知道模型，这是与格林函数或逆函数不同的。

样本自相关函数 $\hat{\rho}_k$ 是对理论自相关函数 ρ_k 的很差的一个估计。利用样本自相关函数 $\hat{\rho}_k$ 进行建模，其误差是很大的，它只能作为求参数初始值的一种方法。

9.1 时间序列模型的动...

2. 逆函数

3. 自相关函数

4. 偏自相关函数

9.2 时间序列建模

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 12 of 21

Go Back

Full Screen

Close

Quit



例9.5 求模型 $MA(m)$ 的自相关函数

$$x_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_m \varepsilon_{t-m} \quad (19)$$

根据自协方差函数的定义，则

$$\begin{aligned} r_k &= E\{x_t x_{t-k}\} \\ &= E\{(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_m \varepsilon_{t-m})(\varepsilon_{t-k} - \theta_1 \varepsilon_{t-k-1} - \cdots - \theta_m \varepsilon_{t-k-m})\} \end{aligned} \quad (20)$$

因为 $\{\varepsilon_t\}$ 为不相关随机序列，令其方差为 σ_ε^2 ，则由式(20)可得到

$$r_k = \begin{cases} (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_m^2) \sigma_\varepsilon^2 & k = 0 \\ (-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \theta_2 \theta_{k+2} + \cdots + \theta_m \theta_{m-k}) \sigma_\varepsilon^2 & k \leq m \\ 0 & k > m \end{cases} \quad (21)$$



- 9.1 时间序列模型的动...
- 2. 逆函数
- 3. 自相关函数
- 4. 偏自相关函数
- 9.2 时间序列建模

$MA(m)$ 序列的自相关函数为

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \frac{-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \theta_2\theta_{k+2} + \cdots + \theta_m\theta_{m-k}}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_m^2} & k \leq m \\ 0 & k > m \end{cases} \quad (22)$$

所以当 $k > m$ 时, $r_k = 0, \rho_k = 0$, 这表明序列为 $MA(m)$ 时, 自协方差函数和自相关函数是截尾的。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 14 of 21

Go Back

Full Screen

Close

Quit



9.1 时间序列模型的动...
2. 逆函数
3. 自相关函数
4. 偏自相关函数
9.2 时间序列建模

4. 偏自相关函数

对平稳序列而言，其自相关函数的截尾性是 $MA(m)$ 序列所特有的，对AR和ARMA模型却是拖尾的。现在，引入偏自相关函数的概念，利用它可导出AR序列具有截尾性质，借以确定模型的阶次。

设 $\{x_t\}$ 是讨论的随机时间序列，考虑用 $x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-n}$ 的线性组合，对 x_t 作最小方差估计(预报)。即选择系数 $\varphi_{k1}, \varphi_{k2}, \dots, \varphi_{kk}$ ，使得下式取极小值

$$\begin{aligned} J &= E \left\{ x_t - \sum_{j=1}^k \varphi_{kj} x_{t-j} \right\}^2 \\ &= r_0 \left(\rho_0 - 2 \sum_{j=1}^k \varphi_{kj} \rho_j + \sum_{i,j=1}^k \varphi_{kj} \varphi_{kj} \rho_{j-i} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

分别对 $\varphi_{kj} (j = 1, 2, \dots, k)$ 求偏导数 $\frac{\partial J}{\partial \varphi_{kj}}$ ，并令其为零，即得到 φ_{kj} 应满足的方程(通常称为Yule-Walker方程)如下

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[«](#) [»](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 15 of 21

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



9.1 时间序列模型的动...

2. 逆函数

3. 自相关函数

4. 偏自相关函数

9.2 时间序列建模

$$\begin{bmatrix} \rho_0 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & \rho_0 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \vdots & & & \ddots & \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{k1} \\ \varphi_{k2} \\ \vdots \\ \varphi_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_k \end{bmatrix} \quad (24)$$

我们称序列 $\varphi_{kk}(k \geq 1)$ 为 $\{x_t\}$ 的偏自相关函数。上式左边的系数矩阵称为Toeplitz矩阵。已知自相关函数时，利用式(24)即可求得 $\{x_t\}$ 的偏自相关函数 $\varphi_{kk}(k \geq 1)$ 。

对于 $AR(n)$ 序列，模型为 $x_t = \sum_{j=1}^n \varphi_j x_{t-j} + \varepsilon_t$ ，代入式(23)中

$$J = E \left\{ \sum_{j=1}^n \varphi_j x_{t-j} + \varepsilon_t - \sum_{j=1}^k \varphi_{kj} x_{t-j} \right\}^2 \quad (25)$$

Home Page

Title Page

« »

◀ ▶

Page 16 of 21

Go Back

Full Screen

Close

Quit



9.1 时间序列模型的动...
2. 逆函数
3. 自相关函数
4. 偏自相关函数
9.2 时间序列建模

若 $k \geq n$ ，则上式可改写为

$$\begin{aligned} J &= E \left\{ \sum_{j=1}^n (\varphi_j - \varphi_{kj}) x_{t-j} + \varepsilon_t - \sum_{j=n+1}^k \varphi_{kj} x_{t-j} \right\}^2 \\ &= \sigma_\varepsilon^2 + E \left\{ \sum_{j=1}^n (\varphi_j - \varphi_{kj}) x_{t-j} - \sum_{j=n+1}^k \varphi_{kj} x_{t-j} \right\}^2 \end{aligned} \quad (26)$$

上式中，当 $j > 0$ 时， $E\{\varepsilon_t x_{t-j}\} = 0$ 。为使 J 取极小值，显然有

$$\varphi_{kj} = \begin{cases} \varphi_j & 1 \leq j \leq n, \\ 0 & n+1 \leq j \leq k, k > n \end{cases} \quad (27)$$

这就是说， $AR(n)$ 序列的偏自相关函数 φ_{kk} 在 $k > n$ 以后全为零，即 $AR(n)$ 的偏自相关函数具有“截尾”特性。可以证明：偏自相关函数 n 步截尾的性质是 $AR(n)$ 模型所特有的，而 $MA(m)$ 和 $ARMA(n, m)$ 模型都不具有这种特性，所以可用它来判别序列是否为 $AR(n)$ 序列，并确定模型的阶次 n 。

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[«](#) [»](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 17 of 21

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



9.2 时间序列建模

时间序列建模主要有Box-Jenkins方法，根据样本自相关函数和偏自相关函数的统计特性来定阶。即若样本自相关函数 $\hat{\rho}_k$ 在 $k > m$ 之后截尾，则判断序列 $\{x_t\}$ 为 $MA(m)$ 模型；若样本偏自相关函数 $\hat{\varphi}_{kk}$ 在 $k > n$ 之后截尾，则判断序列为 $AR(n)$ 模型，当两者都不截尾而呈现拖尾特性时，则判断其为 $ARMA$ 模型。阶次 (n, m) 利用穷举法由低阶向高阶进行拟合，通过模型检验，从而确定最适合的模型。当阶次 (n, m) 较高时，用该法建模的工作量是相当大的。

相关分析是Box-Jenkins方法中进行模型识别的主要手段。首先计算序列的样本自相关函数 $\hat{\rho}_k$ 和偏自相关函数 $\hat{\varphi}_{kk}$ ，然后由统计检验方法判定 $\hat{\rho}_k$ 及 $\hat{\varphi}_{kk}$ 的截尾性、拖尾性和相关性，以选择合适的模型类型对 $\{x_t\}$ 进行拟合。统计检验方法归结为：

9.1 时间序列模型的动...

2. 逆函数

3. 自相关函数

4. 偏自相关函数

9.2 时间序列建模

Home Page

Title Page

« »

◀ ▶

Page 18 of 21

Go Back

Full Screen

Close

Quit



$$\hat{\varphi}_{kk} \sim N\left(0, \frac{1}{N}\right) \quad k > n \quad (28)$$

$$\hat{\rho}_k \sim N\left(0, \frac{1}{N} \left[1 + 2 \sum_{i=1}^m \rho_i^2\right]\right) \quad k > m \quad (29)$$

其中 N 为样本序列长度， n 为 $AR(n)$ 模型的阶次， m 为 $MA(m)$ 模型的阶次。因此， $\hat{\varphi}_{kk}$ 为零的95%置信区间为

$$\left[-\frac{1.96}{\sqrt{N}}, \frac{1.96}{\sqrt{N}}\right] \quad (30)$$

当 $\hat{\varphi}_{kk}$ 的值进入此区间时，则认为其值为零。

由于Box-Jenkins建模方法的计算工作比较繁琐，Pandit和吴贤铭(Wu.S.M)在此基础上，提出了一种程序化的动态数据系统(Dynamic data system)建模方法，简称为DDS方法。

9.1 时间序列模型的动...

2. 逆函数

3. 自相关函数

4. 偏自相关函数

9.2 时间序列建模

Home Page

Title Page

« »

◀ ▶

Page 19 of 21

Go Back

Full Screen

Close

Quit

Pandit-Wu方法的策略是采用 $ARMA(n, n-1)$ 法， n 由低阶向高阶进行建模。例如， $AR(1), ARMA(2, 1), ARMA(3, 2), ARMA(4, 3), \dots$ 当 n 定下后， $m = n - 1$ 随即定下。因此，把原来一个二维 (n, m) 搜索化为一维 $(n, n - 1)$ 搜索问题。每建一次模，需重新计算残差平方和，如果后面的残差平方和比前者有显著的减少，则继续向高阶建模。当残差平方和相差不大时，就用前者(低阶)的模型。由F检验法对残差平方和进行判定。简而言之，建模策略就是通过增加 $ARMA(n, n - 1)$ 阶次来更好地拟合数据，根据残差平方和是否显著减少来判断模型的阶次。这种方法比穷举法明显提高了建模的效率。

实践表明：每步使 n 增加2更好，即按 $n = 1, 2, \dots$ 拟合 $ARMA(2n, 2n - 1)$ 模型，则会以更快的速度找到合适的模型。首先，从系统的物理背景来看， $ARMA(2, 1)$ 模型可得自一个均匀采样的1个自由度的弹簧—质块—阻尼系统，此系统由二阶微分方程确定并受到白噪声激励。类似地，2个自由度的系统由4阶微分方程所确定，对其均匀采样时则得到一个 $ARMA(4, 3)$ 模型。这样，增加1个自由度等于自回归部分的阶次加2。于是，采用 $n = 1, 2, \dots$ 的 $ARMA(2n, 2n - 1)$ 依次拟合系统是合理的，其中 n 可以认为是自由度。



9.1 时间序列模型的动...

2. 逆函数

3. 自相关函数

4. 偏自相关函数

9.2 时间序列建模

Home Page

Title Page

« »

◀ ▶

Page 20 of 21

Go Back

Full Screen

Close

Quit



9.1 时间序列模型的动...

2. 逆函数

3. 自相关函数

4. 偏自相关函数

9.2 时间序列建模

Home Page

Title Page

« »

◀ ▶

Page 21 of 21

Go Back

Full Screen

Close

Quit

DDS方法建模步骤如下:

(1) 从 $ARMA(2,1)$ 模型开始, 以2为步长, 建立 $ARMA(2n, 2n-1)$ 模型。

(2) 每当 n 增加时, 用F检验法检验 $ARMA(2n, 2n-1)$ 与 $ARMA(2n+2, 2n+1)$ 模型残差平方和的差异, 如果在一定的显著性水平之下残差平方和的下降不显著, 就令阶次停止增加, 选择 $ARMA(2n, 2n-1)$ 为所要的模型; 否则, 就增加阶次, 对 $ARMA(2n+2, 2n+1)$ 模型依次进行同样的步骤。

(3) 由F检验法得到的低阶模型 $ARMA(2n, 2n-1)$ 不一定是简约的, 还可以检查其参数 φ_{2n} 及 θ_{2n-1} 的置信区间是否包含零。如果是, 则进一步分析自回归部分或滑动平均部分的阶次是否有降低的可能。

(4) 最后, 有必要对 $ARMA$ 模型的适用性再进行检验, 即进行残差 ε_t 的独立性检验。

必须指出, 吴贤铭认为在拟合模型之前, 可以不对原始时间序列作差分或者季节差分的预处理, 而是根据模型特征多项式的根就可以识别序列的趋势和周期性, 进而合理地改进模型。