



新世纪电子信息与自动化类课程改革教材
《系统辨识基础》教学课件

第8章 闭环系统辨识

作者：李鹏波、胡德文

单位：国防科技大学机电工程与自动化学院

Email: gaoxia73@163.com

中国水利水电出版社版权所有



8.1 闭环系统的可辨识...
8.2 闭环系统的间接辨...
8.3 闭环系统的直接辨...
8.4 闭环系统切换调节...

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 1 of 25

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 8.1 闭环系统的可辨识...
- 8.2 闭环系统的间接辨...
- 8.3 闭环系统的直接辨...
- 8.4 闭环系统切换调节...

在前面讨论各种辨识方法时，都假定了辨识对象是在开环条件下工作，因此前面各章所介绍的辨识方法适合于开环系统辨识。在许多实际问题中，辨识不一定都能在开环状态下进行。例如，有的系统只能在闭环条件下工作，如果断开反馈通道，系统就不稳定。有的系统可能是大系统的一部分，而在这个大系统中不允许或不可能断开反馈通道，例如经济系统和生物系统等，由于它们内部存在的反馈是客观的无法解除的，因此它们的辨识只能在有反馈作用的状态下进行。所以闭环系统辨识是一个实际上经常遇到的问题。

研究闭环系统辨识时，必须注意到以下两个问题：一是当系统的反馈作用不明显或隐含时，必须首先判断系统是否存在反馈，如果将存在反馈作用的系统作为开环系统进行辨识，将存在很大的辨识误差，也可能导致不可辨识；二是开环辨识方法需要附加怎样的条件才能用于闭环辨识。例如，在最小二乘辨识算法中，我们假定输入信号与测量噪声不相关，但在闭环下这个假定条件是不成立的，因为输出测量噪声通过反馈作用与输入信号是相关的。

本章介绍闭环系统辨识的条件和闭环系统辨识的方法，包括间接辨识法、直接辨识法和切换调节器辨识方法。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 2 of 25](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 8.1 闭环系统的可辨识...
- 8.2 闭环系统的间接辨...
- 8.3 闭环系统的直接辨...
- 8.4 闭环系统切换调节...

第8章 闭环系统辨识



8.1 闭环系统的可辨识条件



8.2 闭环系统的间接辨识法



8.3 闭环系统的直接辨识法



8.4 闭环系统切换调节器辨识

Home Page

Title Page



Page 3 of 25

Go Back

Full Screen

Close

Quit



8.1 闭环系统的可辨识性条件

很多实际系统是在闭环下运行的，有些闭环系统的反馈作用比较明显，但有些系统反馈作用是隐含的。例如人体对药物的反应或药物的作用机理模型，就难以直接判断系统中是否存在反馈作用，只有经过计算才能作出判断。

原则上，开环系统辨识的方法都可直接应用于闭环系统的辨识，但这是有条件的。首先，反馈作用下使输入输出信息含量减少；其次，输入与输出噪声相关，产生不可辨识的情况；再就是开环系统的辨识方法应用于闭环系统的辨识，需要具备一定的条件。

有些闭环系统可以辨识，而有些闭环系统不可辨识，那么，闭环系统究竟需要具备怎样的条件才能够辨识呢？

- 8.1 闭环系统的可辨识...
- 8.2 闭环系统的间接辨...
- 8.3 闭环系统的直接辨...
- 8.4 闭环系统切换调节...

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 4 of 25

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



8.1 闭环系统的可辨识性条件

很多实际系统是在闭环下运行的，有些闭环系统的反馈作用比较明显，但有些系统反馈作用是隐含的。例如人体对药物的反应或药物的作用机理模型，就难以直接判断系统中是否存在反馈作用，只有经过计算才能作出判断。

原则上，开环系统辨识的方法都可直接应用于闭环系统的辨识，但这是有条件的。首先，反馈作用下使输入输出信息含量减少；其次，输入与输出噪声相关，产生不可辨识的情况；再就是开环系统的辨识方法应用于闭环系统的辨识，需要具备一定的条件。

有些闭环系统可以辨识，而有些闭环系统不可辨识，那么，闭环系统究竟需要具备怎样的条件才能够辨识呢？

1. 闭环的“阶”不可辨识

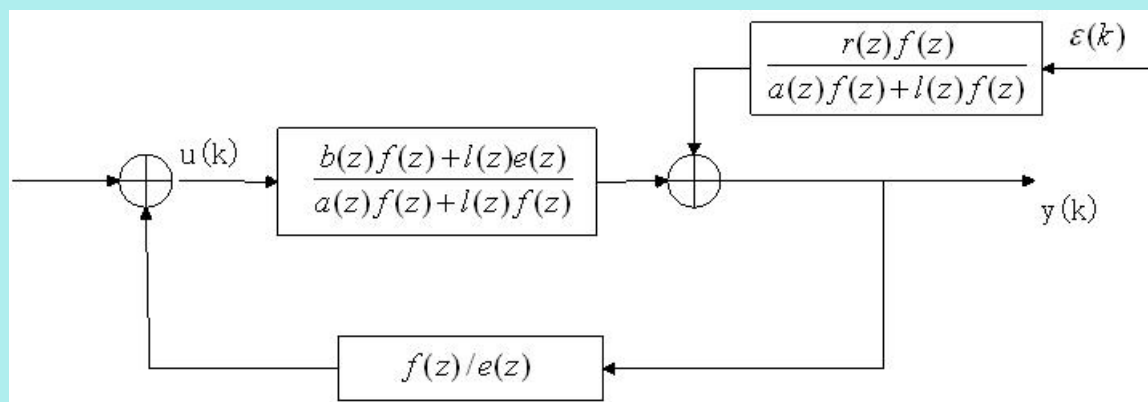
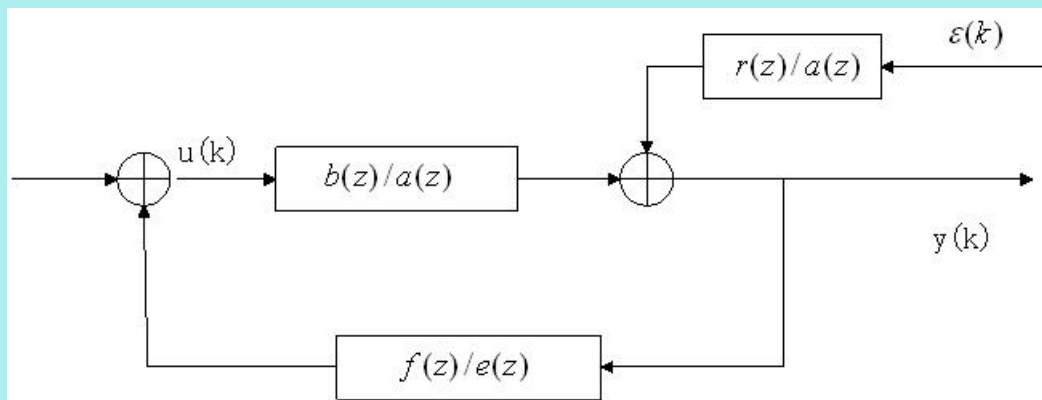
闭环系统前向通道的阶次是不可辨识的，也就是说，如果要要对闭环系统前向通道的数学模型(传递函数、差分方程或状态方程)进行辨识，就必须事先知道系统的阶。

- 8.1 闭环系统的可辨识...
- 8.2 闭环系统的间接辨...
- 8.3 闭环系统的直接辨...
- 8.4 闭环系统切换调节...

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 4 of 25](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 8.1 闭环系统的可辨识...
- 8.2 闭环系统的间接辨...
- 8.3 闭环系统的直接辨...
- 8.4 闭环系统切换调节...



例8.1 如图8.1，8.2所示的两个闭环控制系统I和II，这两个闭环系统的控制对象和控制器方程分别为

Home Page

Title Page



Page 5 of 25

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 8.1 闭环系统的可辨识...
- 8.2 闭环系统的间接辨...
- 8.3 闭环系统的直接辨...
- 8.4 闭环系统切换调节...

I型系统:

$$\begin{cases} a(z)y(k) = b(z)u(k) + r(z)\varepsilon(k) \\ e(z)u(k) = f(z)y(k) \end{cases} \quad (1)$$

II型系统:

$$\begin{cases} (a(z)f(z) + l(z)f(z))y(k) = (b(z)f(z) + l(z)e(z))u(k) + r(z)f(z)\varepsilon(k) \\ e(z)u(k) = f(z)y(k) \end{cases} \quad (2)$$

其中 $l(z)$ 为任意多项式, 可选 $l(z)$, 使I型系统和II型系统的阶次不一样。

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 6 of 25

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 8.1 闭环系统的可辨识...
- 8.2 闭环系统的间接辨...
- 8.3 闭环系统的直接辨...
- 8.4 闭环系统切换调节...

这是因为，从两个系统的输入输出特性看出

$$\text{I:} \quad \left[a - b \cdot \frac{f}{e} \right] y(k) = r\varepsilon(k) \quad (3)$$

$$\text{II:} \quad \left[a^* - b^* \cdot \frac{f}{e} \right] y(k) = r^*\varepsilon(k) \quad (4)$$

其中

$$\frac{b^*}{a^*} = \frac{bf + le}{af + lf}, \quad \frac{r^*}{a^*} = \frac{rf}{af + lf}$$

I, II系统具有相同的输入输出关系 y/ε ，即使 e, f 已知，仍不能唯一确定 $a(z), b(z), r(z)$ 。

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 7 of 25

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

2. 一般情况下，闭环系统参数也不能辨识

例8.2 考虑闭环系统的控制对象和控制器方程为

$$\begin{cases} y(k) + ay(k-1) = bu(k-1) + \varepsilon(k) \\ u(k) = f_0 y(k) \end{cases} \quad (5)$$

求 a, b 的最小二乘估计值。



- 8.1 闭环系统的可辨识...
- 8.2 闭环系统的间接辨...
- 8.3 闭环系统的直接辨...
- 8.4 闭环系统切换调节...

Home Page

Title Page



Page 8 of 25

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 8.1 闭环系统的可辨识...
- 8.2 闭环系统的间接辨...
- 8.3 闭环系统的直接辨...
- 8.4 闭环系统切换调节...

2. 一般情况下，闭环系统参数也不能辨识

例8.2 考虑闭环系统的控制对象和控制器方程为

$$\begin{cases} y(k) + ay(k-1) = bu(k-1) + \varepsilon(k) \\ u(k) = f_0 y(k) \end{cases} \quad (5)$$

求 a, b 的最小二乘估计值。

准则函数为最小二乘准则函数

$$J(a, b) = \sum_{k=0}^{N-1} [y(k+1) + ay(k) - bu(k)]^2 \quad (6)$$

以 $-\alpha u(k) + \alpha f_0 y(k) = 0$ 代入，得

$$\begin{aligned} J(a, b) &= \sum_{k=0}^{N-1} [y(k+1) + ay(k) - bu(k) - \alpha u(k) + \alpha f_0 y(k)]^2 \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} [y(k+1) + (a + \alpha f_0)y(k) - (b + \alpha)u(k)]^2 \\ &= J(a + \alpha f_0, b + \alpha) \end{aligned}$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 8 of 25

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 8.1 闭环系统的可辨识...
- 8.2 闭环系统的间接辨...
- 8.3 闭环系统的直接辨...
- 8.4 闭环系统切换调节...

可以看出，不同参数 (a, b) , $(a + \alpha f_0, b + \alpha)$, α 任意，具有相同的指标泛函。于是，参数的估计值就出现下面的结果

$$\begin{cases} \hat{a} = a + \alpha f_0 \\ \hat{b} = b + \alpha \end{cases}$$

虽然可解得 $a + \alpha f_0, b + \alpha$ ，即使 f_0 已知，也还是求不出 a, b 。显然，前向通道的开环传递函数得不到正确的描述，系统模型的参数是不可辨识的。

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 9 of 25

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



可以看出，不同参数 $(a, b), (a + \alpha f_0, b + \alpha), \alpha$ 任意，具有相同的指标泛函。于是，参数的估计值就出现下面的结果

$$\begin{cases} \hat{a} = a + \alpha f_0 \\ \hat{b} = b + \alpha \end{cases}$$

虽然可解得 $a + \alpha f_0, b + \alpha$ ，即使 f_0 已知，也还是求不出 a, b 。显然，前向通道的开环传递函数得不到正确的描述，系统模型的参数是不可辨识的。

但是，如果 $u(k) = f_0 y(k - 1)$ ，则系统变成可辨识的。此时的准则函数为

$$J(a, b) = \sum_{k=0}^{N-1} [y(k+1) + ay(k) + \alpha f_0 y(k-1) - (b + \alpha)u(k)]^2 \quad (7)$$

由最小二乘法解得 $a, \alpha f_0, b + \alpha$ ，从而解得参数 a, b 。这样，前向通道的开环传递函数就能得到正确的描述。

- 8.1 闭环系统的可辨识...
- 8.2 闭环系统的间接辨...
- 8.3 闭环系统的直接辨...
- 8.4 闭环系统切换调节...

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 9 of 25](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



8.2 闭环系统的间接辨识法与可辨识性条件

定理8.1 单输入单输出系统闭环可辨识的充分条件是：
反馈通道的阶 \geq 前向通道的阶
证明：
系统的控制对象为

$$a(z)y(k) = b(z)u(k) + r(z)\varepsilon(k) \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} a(z) &= 1 + a_1z^{-1} + \cdots + a_nz^{-n} \\ b(z) &= b_1z^{-1} + \cdots + b_nz^{-n} \\ r(z) &= 1 + r_1z^{-1} + \cdots + r_nz^{-n} \end{aligned}$$

反馈控制器为

$$e(z)u(k) = f(z)y(k) \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} e(z) &= 1 + e_1z^{-1} + \cdots + e_nz^{-m} \\ f(z) &= f_0 + f_1z^{-1} + \cdots + f_nz^{-m} \end{aligned}$$

($m \geq n$), 且 $e(z), f(z)$ 无公因子。

- 8.1 闭环系统的可辨识...
- 8.2 闭环系统的间接辨...
- 8.3 闭环系统的直接辨...
- 8.4 闭环系统切换调节...

Home Page

Title Page



Page 10 of 25

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 8.1 闭环系统的可辨识...
- 8.2 闭环系统的间接辨...
- 8.3 闭环系统的直接辨...
- 8.4 闭环系统切换调节...

则闭环系统为

$$p(z)y(k) = q(z)\varepsilon(k) \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} p(z) &= e(z)a(z) - f(z)b(z) = 1 + p_1z^{-1} + \cdots + p_{n+m}z^{-(n+m)} \\ q(z) &= e(z)r(z) = 1 + q_1z^{-1} + \cdots + q_{n+m}z^{-(n+m)} \end{aligned} \quad (11)$$

$p(z), q(z)$ 无公因子。由闭环系统的输入输出数据，辨识得到闭环系统的线性差分方程，即 $p(z), q(z)$ 的估值 $\hat{p}(z), \hat{q}(z)$ 为

$$\begin{aligned} \hat{p}(z) &= 1 + \hat{p}_1z^{-1} + \cdots + \hat{p}_{n+m}z^{-(n+m)} \\ \hat{q}(z) &= 1 + \hat{q}_1z^{-1} + \cdots + \hat{q}_{n+m}z^{-(n+m)} \end{aligned} \quad (12)$$

Home Page

Title Page



Page 11 of 25

Go Back

Full Screen

Close

Quit



另一方面：由式(11)得到

$$\begin{aligned}\hat{p}(z) &= e(z)\hat{a}(z) - \hat{f}(z)b(z) \\ &= 1 + (e_1 + \hat{a}_1 - f_0\hat{b}_1)z^{-1} + \dots \\ \hat{q}(z) &= e(z)\hat{r}(z) \\ &= 1 + (e_1 + \hat{r}_1)z^{-1} + (e_1\hat{r}_1 + e_2 + \hat{r}_2)z^{-2} + \dots\end{aligned}\tag{13}$$

比较式(12)和式(13)，同次幂相等。

- 8.1 闭环系统的可辨识...
- 8.2 闭环系统的间接辨...
- 8.3 闭环系统的直接辨...
- 8.4 闭环系统切换调节...

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 12 of 25

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 8.1 闭环系统的可辨识...
- 8.2 闭环系统的间接辨...
- 8.3 闭环系统的直接辨...
- 8.4 闭环系统切换调节...

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 12 of 25

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

另一方面：由式(11)得到

$$\begin{aligned}\hat{p}(z) &= e(z)\hat{a}(z) - \hat{f}(z)b(z) \\ &= 1 + (e_1 + \hat{a}_1 - f_0\hat{b}_1)z^{-1} + \dots \\ \hat{q}(z) &= e(z)\hat{r}(z) \\ &= 1 + (e_1 + \hat{r}_1)z^{-1} + (e_1\hat{r}_1 + e_2 + \hat{r}_2)z^{-2} + \dots\end{aligned}\tag{13}$$

比较式(12)和式(13)，同次幂相等。

对于 $\hat{q}(z)$ 的同次幂相等，有如下方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ e_1 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ e_{n-1} & \cdots & e_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{r}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \hat{r}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{q}_1 - e_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \hat{q}_n - e_n \end{bmatrix}\tag{14}$$



- 8.1 闭环系统的可辨识...
- 8.2 闭环系统的间接辨...
- 8.3 闭环系统的直接辨...
- 8.4 闭环系统切换调节...

Home Page

Title Page



Page 13 of 25

Go Back

Full Screen

Close

Quit

对于 $\hat{p}(z)$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & f_0 & 0 & 0 \\ e_1 & 1 & \ddots & 0 & f_1 & f_0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \ddots & \ddots \\ e_{n-1} & \cdots & e_1 & 1 & f_{n-1} & \cdots & f_1 & f_0 \\ \vdots & & & e_1 & \vdots & & f_1 & \\ e_m & & & \vdots & f_m & & \vdots & \\ 0 & \ddots & & & 0 & \ddots & & \\ 0 & \cdots & & e_m & 0 & \cdots & & f_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \hat{a}_n \\ -\hat{b}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ -\hat{b}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{p}_1 - e_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \hat{p}_m - e_m \\ \hat{p}_{m+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \hat{p}_{n+m} \end{bmatrix} \quad (15)$$

上式记为

$$F_{(n+m) \times 2n} \hat{\theta}^* = \hat{P} \quad (16)$$

其中 F 为多项式 $e(z)$ 和 $f(z)$ 的Sylvester矩阵。



- 8.1 闭环系统的可辨识...
- 8.2 闭环系统的间接辨...
- 8.3 闭环系统的直接辨...
- 8.4 闭环系统切换调节...

当 $m \geq n$ 时, F 的秩为 $2n$, 是满秩的, 于是可得到式(16)的最小二乘解为

$$\hat{\theta}^* = (F^T F)^{-1} F^T \hat{P} \quad (17)$$

因此, 当 $m \geq n$ 时, $r(z), a(z), b(z)$ 可唯一确定, 系统能辨识。即当反馈通道的阶数大于前向通道的阶数时, 可通过上述方法先辨识闭环系统的传递函数, 然后间接地解得前向通道的参数。这种方法称为闭环系统的间接辨识法。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 14 of 25](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 8.1 闭环系统的可辨识...
- 8.2 闭环系统的间接辨...
- 8.3 闭环系统的直接辨...
- 8.4 闭环系统切换调节...

当 $m \geq n$ 时, F 的秩为 $2n$, 是满秩的, 于是可得到式(16)的最小二乘解为

$$\hat{\theta}^* = (F^T F)^{-1} F^T \hat{P} \quad (17)$$

因此, 当 $m \geq n$ 时, $r(z), a(z), b(z)$ 可唯一确定, 系统能辨识。即当反馈通道的阶数大于前向通道的阶数时, 可通过上述方法先辨识闭环系统的传递函数, 然后间接地解得前向通道的参数。这种方法称为闭环系统的间接辨识法。

当反馈通道的阶数较低时, 不满足 $m \geq n$ 的条件, 可采取如下措施:

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 14 of 25](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



当 $m \geq n$ 时, F 的秩为 $2n$, 是满秩的, 于是可得到式(16)的最小二乘解为

$$\hat{\theta}^* = (F^T F)^{-1} F^T \hat{P} \quad (17)$$

因此, 当 $m \geq n$ 时, $r(z), a(z), b(z)$ 可唯一确定, 系统能辨识。即当反馈通道的阶数大于前向通道的阶数时, 可通过上述方法先辨识闭环系统的传递函数, 然后间接地解得前向通道的参数。这种方法称为闭环系统的间接辨识法。

当反馈通道的阶数较低时, 不满足 $m \geq n$ 的条件, 可采取如下措施:

1. 在反馈通道上加延迟。

$$d \geq n_a - n_f - d_1 + p \quad (18)$$

式中 d 为反馈通道的时延, n_a 为前向通道的阶次, n_f 为反馈通道的阶次, d_1 为前向通道的时延, p 为 $p(z)$ 和 $a(z)$ 的公因子阶数。但此时要注意闭环系统的稳定性。

Home Page

Title Page



Page 14 of 25

Go Back

Full Screen

Close

Quit



当 $m \geq n$ 时, F 的秩为 $2n$, 是满秩的, 于是可得到式(16)的最小二乘解为

$$\hat{\theta}^* = (F^T F)^{-1} F^T \hat{P} \quad (17)$$

因此, 当 $m \geq n$ 时, $r(z), a(z), b(z)$ 可唯一确定, 系统能辨识。即当反馈通道的阶数大于前向通道的阶数时, 可通过上述方法先辨识闭环系统的传递函数, 然后间接地解得前向通道的参数。这种方法称为闭环系统的间接辨识法。

当反馈通道的阶数较低时, 不满足 $m \geq n$ 的条件, 可采取如下措施:

1. 在反馈通道上加延迟。

$$d \geq n_a - n_f - d_1 + p \quad (18)$$

式中 d 为反馈通道的时延, n_a 为前向通道的阶次, n_f 为反馈通道的阶次, d_1 为前向通道的时延, p 为 $p(z)$ 和 $a(z)$ 的公因子阶数。但此时要注意闭环系统的稳定性。

2. 反馈通道上用一个非线性或时变的调节器。

Home Page

Title Page



Page 14 of 25

Go Back

Full Screen

Close

Quit



当 $m \geq n$ 时, F 的秩为 $2n$, 是满秩的, 于是可得到式(16)的最小二乘解为

$$\hat{\theta}^* = (F^T F)^{-1} F^T \hat{P} \quad (17)$$

因此, 当 $m \geq n$ 时, $r(z), a(z), b(z)$ 可唯一确定, 系统能辨识。即当反馈通道的阶数大于前向通道的阶数时, 可通过上述方法先辨识闭环系统的传递函数, 然后间接地解得前向通道的参数。这种方法称为闭环系统的间接辨识法。

当反馈通道的阶数较低时, 不满足 $m \geq n$ 的条件, 可采取如下措施:

1. 在反馈通道上加延迟。

$$d \geq n_a - n_f - d_1 + p \quad (18)$$

式中 d 为反馈通道的时延, n_a 为前向通道的阶次, n_f 为反馈通道的阶次, d_1 为前向通道的时延, p 为 $p(z)$ 和 $a(z)$ 的公因子阶数。但此时要注意闭环系统的稳定性。

2. 反馈通道上用一个非线性或时变的调节器。

3. 反馈通道上的调节器能在几种不同调节规律之间切换。

Home Page

Title Page



Page 14 of 25

Go Back

Full Screen

Close

Quit

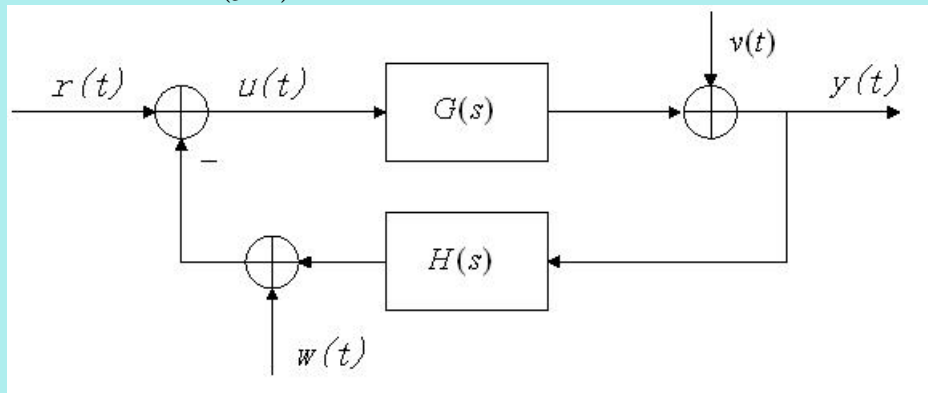


- 8.1 闭环系统的可辨识...
- 8.2 闭环系统的间接辨...
- 8.3 闭环系统的直接辨...
- 8.4 闭环系统切换调节...

8.3 闭环系统的直接辨识法

1. 频率特性的直接辨识法

设闭环系统的结构图如图8.3所示。前向通道和反馈通道的传递函数分别为 $G(s)$, $H(s)$ ；相应的输入输出变量为 $u(t)$, $y(t)$ ；噪声变量为 $w(t)$, $v(t)$ ，且 $w(t)$ 和 $v(t)$ 是均值为零、互不相关的平稳随机变量；令反馈通道上的扰动信号 $r(t) = 0$ 。要通过可测的输入输出信号 $u(t)$ 和 $y(t)$ ，直接辨识前向通道上系统的频率响应 $G(j\omega)$ 。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 15 of 25](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



当线性传递函数 $G(s)$ 的输入输出均为零均值平稳随机过程时，则有

$$\begin{cases} S_{yu}(j\omega) = G(j\omega)S_u(j\omega) \\ S_y(\omega) = |G(j\omega)|^2 S_u(\omega) \end{cases} \quad (19)$$

式中 $S_{yu}(j\omega)$ 为 $G(s)$ 的输入输出互谱密度， $S_u(\omega)$ 和 $S_y(\omega)$ 分别输入和输出信号的功率谱密度。

- 8.1 闭环系统的可辨识...
- 8.2 闭环系统的间接辨...
- 8.3 闭环系统的直接辨...
- 8.4 闭环系统切换调节...

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 16 of 25

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



当线性传递函数 $G(s)$ 的输入输出均为零均值平稳随机过程时，则有

$$\begin{cases} S_{yu}(j\omega) = G(j\omega)S_u(j\omega) \\ S_y(\omega) = |G(j\omega)|^2 S_u(\omega) \end{cases} \quad (19)$$

式中 $S_{yu}(j\omega)$ 为 $G(s)$ 的输入输出互谱密度， $S_u(\omega)$ 和 $S_y(\omega)$ 分别输入和输出信号的功率谱密度。

如果能够得到 $S_{yu}(j\omega)$ 和 $S_u(\omega)$ 的估计值 $\hat{S}_{yu}(j\omega)$ 和 $\hat{S}_u(\omega)$ ，则 $G(j\omega)$ 的估计值 $\hat{G}(j\omega)$ 为

$$\hat{G}(j\omega) = \frac{\hat{S}_{yu}(j\omega)}{\hat{S}_u(\omega)} \quad (20)$$

上式就是闭环条件下由 $\hat{S}_{yu}(j\omega)$ 和 $\hat{S}_u(\omega)$ 直接辨识前向通道频率特性的基本公式。但这个估计 $\hat{G}(j\omega)$ 是有偏的。

- 8.1 闭环系统的可辨识...
- 8.2 闭环系统的间接辨...
- 8.3 闭环系统的直接辨...
- 8.4 闭环系统切换调节...

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 16 of 25](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 8.1 闭环系统的可辨识...
- 8.2 闭环系统的间接辨...
- 8.3 闭环系统的直接辨...
- 8.4 闭环系统切换调节...

前向通道频率特性的估计，除了 $v(t) = 0$ 之外，一般都是有偏的，其原因是系统中存在反馈，使前向通道的控制输入与噪声相关。为了克服这种有偏性，通常采用外加参考输入 $r(t)$ 的办法。 $r(t)$ 可看作为摄动信号，不妨设此为零均值平稳随机过程，它在 $G(s)$ 的整个带通区内具有非零的功率谱密度，且 $r(t)$, $w(t)$ 与 $v(t)$ 三者彼此统计独立。此时有

$$S_{ry}(j\omega) = G(j\omega)S_{ru}(j\omega) \quad (21)$$

$$\hat{G}(j\omega) = \frac{\hat{S}_{ry}(j\omega)}{\hat{S}_{ru}(j\omega)} \quad (22)$$

利用这种方法得到的估计量 $\hat{G}(j\omega)$ 仍然是有偏的，不过较前者有很大的改进。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 17 of 25](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



2. 用辅助变量法来直接辨识

应用辅助变量法来对控制对象进行直接辨识，其基本思想是在反馈通道上也加入激励信号(如加M序列)，将系统的输入输出变量分解成

$$\begin{cases} u(k) = u_e(k) + u_r(k) \\ y(k) = y_e(k) + y_r(k) \end{cases} \quad (23)$$

下标“ e ”和“ r ”表示相应变量是由 $e(k)$ 或 $r(k)$ 激励生成的。显然， $u_r(k)$ 和 $y_r(k)$ 与 $e(k)$ 是不相关的。若用 $u_r(k)$ 和 $y_r(k)$ 代替 $u(k)$ 和 $y(k)$ 构成一个辅助矩阵，记作

$$\mathbf{Z}_r(k) = [\mathbf{z}_r(k) \ \mathbf{z}_r(k+1) \ \cdots \ \mathbf{z}_r(k+N-1)]^T \quad (24)$$

其中

$$\mathbf{z}_r(k) = [y_r(k) \ \cdots \ y_r(k-n) \ u_r(k) \ \cdots \ u_r(k-n)]^T \quad (25)$$

- 8.1 闭环系统的可辨识...
- 8.2 闭环系统的间接辨...
- 8.3 闭环系统的直接辨...
- 8.4 闭环系统切换调节...

Home Page

Title Page



Page 18 of 25

Go Back

Full Screen

Close

Quit



2. 用辅助变量法来直接辨识

应用辅助变量法来对控制对象进行直接辨识，其基本思想是在反馈通道上也加入激励信号(如加M序列)，将系统的输入输出变量分解成

$$\begin{cases} u(k) = u_e(k) + u_r(k) \\ y(k) = y_e(k) + y_r(k) \end{cases} \quad (23)$$

下标“ e ”和“ r ”表示相应变量是由 $e(k)$ 或 $r(k)$ 激励生成的。显然， $u_r(k)$ 和 $y_r(k)$ 与 $e(k)$ 是不相关的。若用 $u_r(k)$ 和 $y_r(k)$ 代替 $u(k)$ 和 $y(k)$ 构成一个辅助矩阵，记作

$$\mathbf{Z}_r(k) = [\mathbf{z}_r(k) \ \mathbf{z}_r(k+1) \ \cdots \ \mathbf{z}_r(k+N-1)]^T \quad (24)$$

其中

$$\mathbf{z}_r(k) = [y_r(k) \ \cdots \ y_r(k-n) \ u_r(k) \ \cdots \ u_r(k-n)]^T \quad (25)$$

那么，利用辅助变量法，可以得到参数估计值为

$$\hat{\theta}_{IV} = (\mathbf{Z}_r^T(k)\Phi)^{-1}\mathbf{Z}_r^T(k)Y \quad (26)$$

由于 $\mathbf{Z}_r(k)$ 与 $e(k)$ 不相关，故 $\hat{\theta}_{IV}$ 可以是无偏一致估计值。

- 8.1 闭环系统的可辨识...
- 8.2 闭环系统的间接辨...
- 8.3 闭环系统的直接辨...
- 8.4 闭环系统切换调节...

[Home Page](#)[Title Page](#)

Page 18 of 25

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



2. 用辅助变量法来直接辨识

应用辅助变量法来控制对象进行直接辨识，其基本思想是在反馈通道上也加入激励信号(如加M序列)，将系统的输入输出变量分解成

$$\begin{cases} u(k) = u_e(k) + u_r(k) \\ y(k) = y_e(k) + y_r(k) \end{cases} \quad (23)$$

下标“ e ”和“ r ”表示相应变量是由 $e(k)$ 或 $r(k)$ 激励生成的。显然， $u_r(k)$ 和 $y_r(k)$ 与 $e(k)$ 是不相关的。若用 $u_r(k)$ 和 $y_r(k)$ 代替 $u(k)$ 和 $y(k)$ 构成一个辅助矩阵，记作

$$\mathbf{Z}_r(k) = [\mathbf{z}_r(k) \ \mathbf{z}_r(k+1) \ \cdots \ \mathbf{z}_r(k+N-1)]^T \quad (24)$$

其中

$$\mathbf{z}_r(k) = [y_r(k) \ \cdots \ y_r(k-n) \ u_r(k) \ \cdots \ u_r(k-n)]^T \quad (25)$$

那么，利用辅助变量法，可以得到参数估计值为

$$\hat{\theta}_{IV} = (\mathbf{Z}_r^T(k)\Phi)^{-1}\mathbf{Z}_r^T(k)Y \quad (26)$$

由于 $\mathbf{Z}_r(k)$ 与 $e(k)$ 不相关，故 $\hat{\theta}_{IV}$ 可以是无偏一致估计值。但辅助矩阵 $\mathbf{Z}_r(k)$ 中的元素 $u_r(k)$ 和 $y_r(k)$ 是不可测的，只能用迭代的方法计算。

- 8.1 闭环系统的可辨识...
- 8.2 闭环系统的间接辨...
- 8.3 闭环系统的直接辨...
- 8.4 闭环系统切换调节...

Home Page

Title Page



Page 18 of 25

Go Back

Full Screen

Close

Quit

3. 用相关最小二乘法来直接辨识

考虑如图8.5所示的闭环系统。前向通道上的输入输出是可测的，应用相关最小二乘法来对控制对象进行直接辨识，记作COR-I/O。

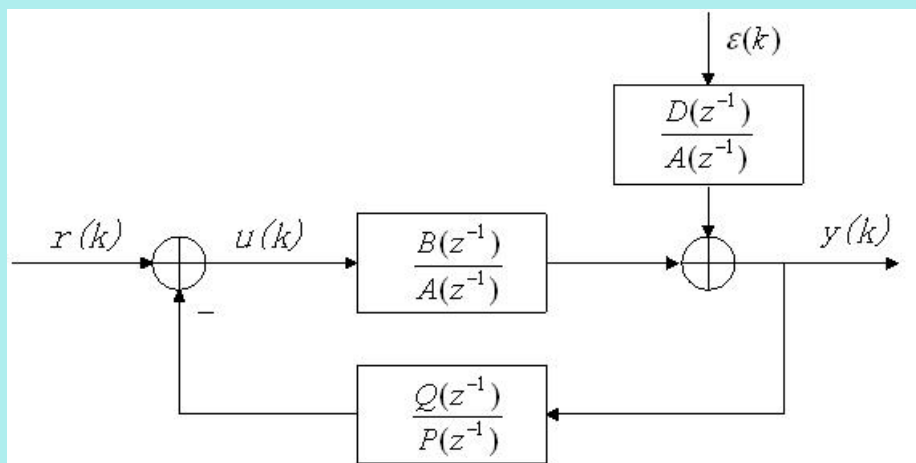


图8.5中控制器模型未知；反馈通道上的扰动信号 $r(k)$ 不可测；各传递函数多项式的结构形式如下

$$\begin{cases} A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n} \\ B(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n} \\ C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + \cdots + c_n z^{-n} \\ P(z^{-1}) = 1 + p_1 z^{-1} + \cdots + p_m z^{-m} \\ Q(z^{-1}) = q_0 + q_1 z^{-1} + \cdots + q_m z^{-m} \end{cases} \quad (27)$$



- 8.1 闭环系统的可辨识...
- 8.2 闭环系统的间接辨...
- 8.3 闭环系统的直接辨...
- 8.4 闭环系统切换调节...

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 19 of 25

Go Back

Full Screen

Close

Quit



这时前向通道的模型为

$$y(k) = - \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) + \sum_{i=1}^n b_i u(k-i) + \sum_{i=1}^n c_i \varepsilon(k-i) \quad (28)$$

- 8.1 闭环系统的可辨识...
- 8.2 闭环系统的间接辨...
- 8.3 闭环系统的直接辨...
- 8.4 闭环系统切换调节...

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 20 of 25

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



- 8.1 闭环系统的可辨识...
- 8.2 闭环系统的间接辨...
- 8.3 闭环系统的直接辨...
- 8.4 闭环系统切换调节...

这时前向通道的模型为

$$y(k) = - \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) + \sum_{i=1}^n b_i u(k-i) + \sum_{i=1}^n c_i \varepsilon(k-i) \quad (28)$$

对上式进行相关分析处理，可得

$$\begin{aligned} R_{yu}(n+j) = & - \sum_{i=1}^n a_i R_{yu}(n-i+j) + \sum_{i=1}^n b_i R_u(n-i+j) \\ & + \sum_{i=1}^n c_i R_{u\varepsilon}(n-i+j) \quad j = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (29)$$

其中 $R_{yu}(j)$, $R_u(j)$ 和 $R_{u\varepsilon}(j)$ 表示对应的相关函数。因输入 $u(k)$ 与噪声 $\varepsilon(k)$ 的将来值无关，故上式中 $R_{u\varepsilon}(n-i+j) = 0, \forall i, j$ 。由此可得

$$\mathbf{R}_{yu} = \mathbf{S}\theta \quad (30)$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 20 of 25

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 8.1 闭环系统的可辨识...
- 8.2 闭环系统的间接辨...
- 8.3 闭环系统的直接辨...
- 8.4 闭环系统切换调节...

Home Page

Title Page



Page 21 of 25

Go Back

Full Screen

Close

Quit

其中

$$\begin{aligned}\theta &= [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n \ b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n]^T \\ \mathbf{R}_{yu} &= [R_{yu}(n+1) \ R_{yu}(n+2) \ \cdots \ R_{yu}(n+N)]^T \\ \mathbf{S} &= \begin{bmatrix} R_{yu}(n) & \cdots & R_{yu}(1) & R_u(n) & \cdots & R_u(1) \\ R_{yu}(n+1) & \cdots & R_{yu}(2) & R_u(n+1) & \cdots & R_u(2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{yu}(n+N-1) & \cdots & R_{yu}(N) & R_u(n+N-1) & \cdots & R_u(N) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

式(30)的最小二乘解为

$$\hat{\theta} = (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{R}_{yu} \quad (31)$$



- 8.1 闭环系统的可辨识...
- 8.2 闭环系统的间接辨...
- 8.3 闭环系统的直接辨...
- 8.4 闭环系统切换调节...

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀](#) [▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 21 of 25

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

其中

$$\begin{aligned}\theta &= [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n \ b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n]^T \\ \mathbf{R}_{yu} &= [R_{yu}(n+1) \ R_{yu}(n+2) \ \cdots \ R_{yu}(n+N)]^T \\ \mathbf{S} &= \begin{bmatrix} R_{yu}(n) & \cdots & R_{yu}(1) & R_u(n) & \cdots & R_u(1) \\ R_{yu}(n+1) & \cdots & R_{yu}(2) & R_u(n+1) & \cdots & R_u(2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{yu}(n+N-1) & \cdots & R_{yu}(N) & R_u(n+N-1) & \cdots & R_u(N) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

式(30)的最小二乘解为

$$\hat{\theta} = (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{R}_{yu} \quad (31)$$

从上式可看出，COR-I/O闭环直接辨识需要先计算出相关函数，再利用最小二乘法，其结果和开环辨识并没有什么区别。相应地，也可得到递推算法。但在使用COR-I/O方法时还需要注意到：反馈通道上的扰动信号必须与 $e(k)$ 不相关；如果系统输出信号受到低频扰动信号的影响，则需要对输入输出信号进行高通滤波；另外，参数估计值的收敛速度与信噪比的大小有关。



- 8.1 闭环系统的可辨识...
- 8.2 闭环系统的间接辨...
- 8.3 闭环系统的直接辨...
- 8.4 闭环系统切换调节...

如果在上述辨识算法的基础上，再在反馈通道上外加扰动信号 $r(k)$ ，而且这种信号是可观测的，则采用相关-输入/输出/扰动(COR-I/O/P)方法辨识，将可取得更好的效果。类似于式(31)的推导过程，COR-I/O/P的解为

$$\hat{\theta} = (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{R}_{yr} \quad (32)$$

但其中

$$\mathbf{R}_{yr} = [R_{yr}(n+1) \ R_{yr}(n+2) \ \cdots \ R_{yr}(n+N)]^T$$
$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} R_{yr}(n) & \cdots & R_{yr}(1) & R_{ru}(n) & \cdots & R_{ru}(1) \\ R_{yr}(n+1) & \cdots & R_{yr}(2) & R_{ru}(n+1) & \cdots & R_{ru}(2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{yr}(n+N-1) & \cdots & R_{yr}(N) & R_{ru}(n+N-1) & \cdots & R_{ru}(N) \end{bmatrix}$$

需要注意的问题和COR-I/O辨识是一样的。

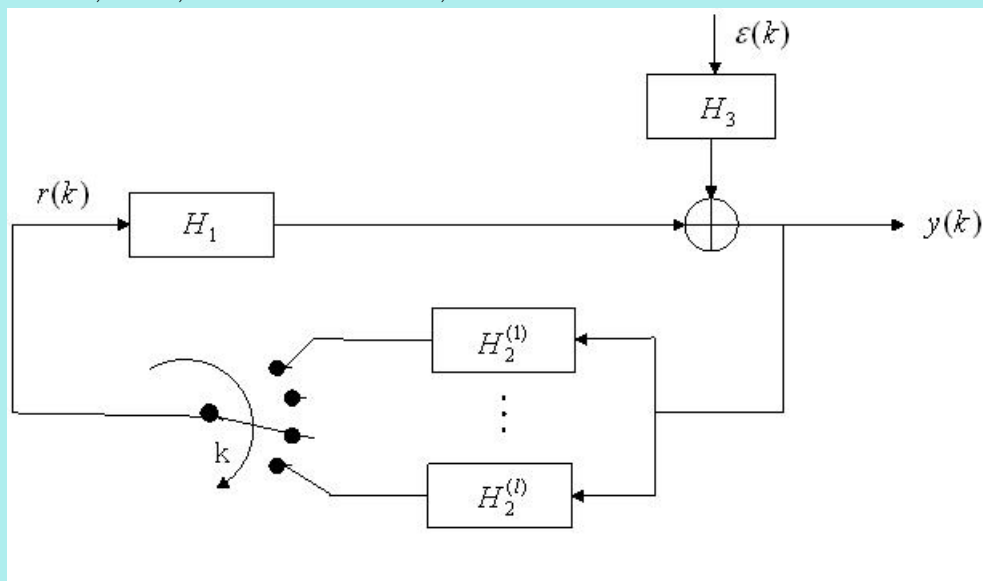
[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 22 of 25](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

8.4 闭环系统切换调节器辨识

定理8.2 多输入多输出闭环系统，配 l 个设有切换开关的反馈调节器，能辨识的充分条件是

$$\text{rank} \begin{bmatrix} I & I & \cdots & I \\ H_2^{(1)} & H_2^{(2)} & \cdots & H_2^{(l)} \end{bmatrix} = r + m \quad (33)$$

其中 $H_2^{(i)}, i = 1, \dots, l$ 线性无关， r, m 分别是闭环系统的输入输出维数。



- 8.1 闭环系统的可辨识...
- 8.2 闭环系统的间接辨...
- 8.3 闭环系统的直接辨...
- 8.4 闭环系统切换调节...

Home Page

Title Page



Page 23 of 25

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 8.1 闭环系统的可辨识...
- 8.2 闭环系统的间接辨...
- 8.3 闭环系统的直接辨...
- 8.4 闭环系统切换调节...

例8.3 设 $a(z), b(z), r(z)$ 阶次为 n , $e(z), f(z)$ 阶次为 m , 设此例中

$$\begin{cases} f^{(r)}(z) = f_0^{(r)} & r = 1, 2 \\ e^{(r)}(z) = 1 \end{cases} \quad (34)$$

即反馈通道用两个切换调节器, 这两个调节器都是简单的比例环节。

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 24 of 25

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



- 8.1 闭环系统的可辨识...
- 8.2 闭环系统的间接辨...
- 8.3 闭环系统的直接辨...
- 8.4 闭环系统切换调节...

例8.3 设 $a(z), b(z), r(z)$ 阶次为 n , $e(z), f(z)$ 阶次为 m , 设此例中

$$\begin{cases} f^{(r)}(z) = f_0^{(r)} & r = 1, 2 \\ e^{(r)}(z) = 1 \end{cases} \quad (34)$$

即反馈通道用两个切换调节器, 这两个调节器都是简单的比例环节。
闭环系统的差分方程分别为

$$\frac{y(k)}{\varepsilon(k)} = \frac{r(z)}{a(z) - f_0^{(r)}b(z)} = \frac{r(z)}{p^{(r)}(z)} \quad r = 1, 2 \quad (35)$$

其中

$$p^{(r)}(z) = 1 + (a_1 - f_0^{(r)}b_1)z^{-1} + \cdots + (a_n - f_0^{(r)}b_n)z^{-n}$$

Home Page

Title Page



Page 24 of 25

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 8.1 闭环系统的可辨识...
- 8.2 闭环系统的间接辨...
- 8.3 闭环系统的直接辨...
- 8.4 闭环系统切换调节...

分两步进行辨识:

1. 由闭环系统的输入输出数据估计闭环方程 $\frac{y(k)}{\varepsilon(k)} = \frac{r(z)}{p^{(r)}(z)}$ 的参数;

$$\hat{p}_1^{(r)}, \dots, \hat{p}_n^{(r)}, \quad (r = 1, 2) \quad \hat{r}_i, \dots, \hat{r}_n$$

Home Page

Title Page



Page 25 of 25

Go Back

Full Screen

Close

Quit



8.1 闭环系统的可辨识...
8.2 闭环系统的间接辨...
8.3 闭环系统的直接辨...
8.4 闭环系统切换调节...

分两步进行辨识:

1. 由闭环系统的输入输出数据估计闭环方程 $\frac{y(k)}{\varepsilon(k)} = \frac{r(z)}{p^{(r)}(z)}$ 的参数;

$$\hat{p}_1^{(r)}, \dots, \hat{p}_n^{(r)}, \quad (r = 1, 2) \quad \hat{r}_i, \dots, \hat{r}_n$$

2. 再由上面的参数估计前向通道的参数 a_i, b_i 。

$$\begin{cases} \hat{p}_i^{(1)} = \hat{a}_i - \hat{f}_0^{(1)} \hat{b}_i, & i = 1, 2, \dots, n \\ \hat{p}_i^{(2)} = \hat{a}_i - \hat{f}_0^{(2)} \hat{b}_i \end{cases}$$

Home Page

Title Page



Page 25 of 25

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 8.1 闭环系统的可辨识...
- 8.2 闭环系统的间接辨...
- 8.3 闭环系统的直接辨...
- 8.4 闭环系统切换调节...

分两步进行辨识:

1. 由闭环系统的输入输出数据估计闭环方程 $\frac{y(k)}{\varepsilon(k)} = \frac{r(z)}{p^{(r)}(z)}$ 的参数;

$$\hat{p}_1^{(r)}, \dots, \hat{p}_n^{(r)}, \quad (r = 1, 2) \quad \hat{r}_i, \dots, \hat{r}_n$$

2. 再由上面的参数估计前向通道的参数 a_i, b_i 。

$$\begin{cases} \hat{p}_i^{(1)} = \hat{a}_i - \hat{f}_0^{(1)} \hat{b}_i, & i = 1, 2, \dots, n \\ \hat{p}_i^{(2)} = \hat{a}_i - \hat{f}_0^{(2)} \hat{b}_i \end{cases}$$

可见, 对于这个单输入单输出闭环系统, 仅用两个简单的比例环节作为反馈通道的切换调节器, 就能对闭环系统进行辨识。

Home Page

Title Page



Page 25 of 25

Go Back

Full Screen

Close

Quit