



第7章 系统阶次的辨识

作者：李鹏波、胡德文

单位：国防科技大学机电工程与自动化学院

Email: gaoxia73@163.com

中国水利水电出版社版权所有



7.2 根据残差特性判定...
2. 确定阶的F检验法
3. 方程误差独立性检验法
7.3 确定阶的AIC准则
2. AIC法对线性定常系...
3. AIC准则与F检验法...

Home Page

Title Page



Page 1 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit



7.2 根据残差特性判定...

2. 确定阶的F检验法

3. 方程误差独立性检验法

7.3 确定阶的AIC准则

2. AIC法对线性定常系...

3. AIC准则与F检验法...

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀ ▶

◀ ▶

Page 2 of 18

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

系统的阶次，对传递函数模型而言，指极点个数；对状态空间模型而言，指最小实现的状态个数；在系统噪声为有色噪声的情况下，还须加噪声谱的阶。

在前面各章讨论模型参数的辨识方法时，都假定模型的阶次是已知的。在一些实际问题中，模型的阶可以按理论推导获得，而在另一些实际问题中，模型的阶次却无法用理论推导的方法确定，需要对模型的阶进行辨识。

本章讨论单输入单输出SISO系统的阶次辨识问题，主要介绍F检验法和AIC准则法这两种基本的阶次辨识方法。这两种方法的应用较为普遍，可以在参数估计的过程中同时辨识阶次，所以应用上比较方便。阶次辨识和参数估计两者是互相依赖的，也就是说进行参数估计时需要已知阶次；而辨识阶次时又要利用参数估计值，两者是不可分离的。



第7章 系统阶次的辨识

7.2 根据残差特性判定模型的阶次

1. 阶和目标函数

2. 确定阶的F检验法

3. 方程误差独立性检验

7.3 确定阶次的AIC准则

1. AIC准则

2. AIC法对线性定常系统定阶

3. AIC准则与F检验法的关系

7.2 根据残差特性判定...

2. 确定阶的F检验法

3. 方程误差独立性检验法

7.3 确定阶的AIC准则

2. AIC法对线性定常系...

3. AIC准则与F检验法...

Home Page

Title Page



Page 3 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit



7.2 根据残差特性判定模型的阶次

1. 阶和目标函数

考虑系统模型为

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + \varepsilon(k) \quad (1)$$

式中 $y(k)$ 为输出； $u(k)$ 为输入。用最小二乘法求出参数 θ 的估值，则目标函数为

$$J_1 = \frac{1}{N} \varepsilon^T \varepsilon \quad (2)$$

7.2 根据残差特性判定...

2. 确定阶的F检验法

3. 方程误差独立性检验法

7.3 确定阶的AIC准则

2. AIC法对线性定常系...

3. AIC准则与F检验法...

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 4 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 7.2 根据残差特性判定...
- 2. 确定阶的F检验法
- 3. 方程误差独立性检验法
- 7.3 确定阶的AIC准则
- 2. AIC法对线性定常系...
- 3. AIC准则与F检验法...

7.2 根据残差特性判定模型的阶次

1. 阶和目标函数

考虑系统模型为

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + \varepsilon(k) \quad (1)$$

式中 $y(k)$ 为输出； $u(k)$ 为输入。用最小二乘法求出参数 θ 的估值，则目标函数为

$$J_1 = \frac{1}{N} \varepsilon^T \varepsilon \quad (2)$$

如果模型为

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + C(z^{-1})\varepsilon(k) \quad (3)$$

则目标函数为

$$J_2 = \frac{1}{N} \varepsilon_1^T \varepsilon_1 \quad (4)$$

其中 ε 为过程模型的余量(残差)， ε_1 为过程模型与噪声模型的噪声项，即对噪声也进行了建模。

Home Page

Title Page



Page 4 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit

如果阶次已给定，估计参数 θ ，则要求 $J(J_1$ 或 $J_2)$ 取极小值。
倘若阶次未知，则估计参数个数未知，也要求 J 取极小值。那么，当阶次递增时， J 的变化规律如何呢？



- 7.2 根据残差特性判定...
- 2. 确定阶的 F 检验法
- 3. 方程误差独立性检验法
- 7.3 确定阶的 AIC 准则
- 2. AIC 法对线性定常系...
- 3. AIC 准则与 F 检验法...

[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 5 of 18

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



7.2 根据残差特性判定...

2. 确定阶的F检验法

3. 方程误差独立性检验法

7.3 确定阶的AIC准则

2. AIC法对线性定常系...

3. AIC准则与F检验法...

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 5 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit

如果阶次已给定，估计参数 θ ，则要求 $J(J_1$ 或 $J_2)$ 取极小值。

倘若阶次未知，则估计参数个数未知，也要求 J 取极小值。那么，当阶次递增时， J 的变化规律如何呢？

对于不同的阶次，目标函数为

$$J_1(n) = \frac{1}{N}(Y - \Phi\hat{\theta})^T(Y - \Phi\hat{\theta}) \quad (5)$$

$$J_2(n) = \frac{1}{N}(Y - \Phi\hat{\theta}_1)^T(Y - \Phi\hat{\theta}_1) \quad (6)$$

当 $n = 1, 2, \dots$ 时， $J(n)(J_1(n)$ 或 $J_2(n))$ 随着 n 的增加而减小。如果 n_0 为正确的阶，则在 $n = n_0 - 1$ 时， $J(n)$ 出现最后一次陡峭的下降， n 再增大，则 $J(n)$ 保持不变或只有微小的变化。



7.2 根据残差特性判定...

2. 确定阶的F检验法

3. 方程误差独立性检验法

7.3 确定阶的AIC准则

2. AIC法对线性定常系...

3. AIC准则与F检验法...

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 5 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit

如果阶次已给定，估计参数 θ ，则要求 $J(J_1$ 或 $J_2)$ 取极小值。

倘若阶次未知，则估计参数个数未知，也要求 J 取极小值。那么，当阶次递增时， J 的变化规律如何呢？

对于不同的阶次，目标函数为

$$J_1(n) = \frac{1}{N}(Y - \Phi\hat{\theta})^T(Y - \Phi\hat{\theta}) \quad (5)$$

$$J_2(n) = \frac{1}{N}(Y - \Phi\hat{\theta}_1)^T(Y - \Phi\hat{\theta}_1) \quad (6)$$

当 $n = 1, 2, \dots$ 时， $J(n)(J_1(n)$ 或 $J_2(n))$ 随着 n 的增加而减小。如果 n_0 为正确的阶，则在 $n = n_0 - 1$ 时， $J(n)$ 出现最后一次陡峭的下降， n 再增大，则 $J(n)$ 保持不变或只有微小的变化。

判断阶的法则如下：

(1)是否满足估计算法的假设条件，即残差白色，且目标函数极小；



7.2 根据残差特性判定...

2. 确定阶的F检验法

3. 方程误差独立性检验法

7.3 确定阶的AIC准则

2. AIC法对线性定常系...

3. AIC准则与F检验法...

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 5 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit

如果阶次已给定，估计参数 θ ，则要求 $J(J_1$ 或 $J_2)$ 取极小值。

倘若阶次未知，则估计参数个数未知，也要求 J 取极小值。那么，当阶次递增时， J 的变化规律如何呢？

对于不同的阶次，目标函数为

$$J_1(n) = \frac{1}{N}(Y - \Phi\hat{\theta})^T(Y - \Phi\hat{\theta}) \quad (5)$$

$$J_2(n) = \frac{1}{N}(Y - \Phi\hat{\theta}_1)^T(Y - \Phi\hat{\theta}_1) \quad (6)$$

当 $n = 1, 2, \dots$ 时， $J(n)(J_1(n)$ 或 $J_2(n))$ 随着 n 的增加而减小。如果 n_0 为正确的阶，则在 $n = n_0 - 1$ 时， $J(n)$ 出现最后一次陡峭的下降， n 再增大，则 $J(n)$ 保持不变或只有微小的变化。

判断阶的法则如下：

(1)是否满足估计算法的假设条件，即残差白色，且目标函数极小；

(2)是否可进一步降阶。即无噪声时，阶正确，则目标函数极小，且为零，系统输出和模型的输出相同；有噪声时，阶合适，则目标函数极小，但不为零，系统输出和模型输出接近。

2. 确定阶的F检验法

$\dot{A}str\ddot{o}m$ (1968)提出的F检验法，引入一个假设检验，将模型阶次的判定问题归结为当从 n_1 增加到 n_2 时， $J_2(n_2)$ 较 $J_2(n_1)$ 下降是否显著的问题。



7.2 根据残差特性判定...

2. 确定阶的F检验法

3. 方程误差独立性检验法

7.3 确定阶的AIC准则

2. AIC法对线性定常系...

3. AIC准则与F检验法...

Home Page

Title Page



Page 6 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit



7.2 根据残差特性判定...

2. 确定阶的F检验法

3. 方程误差独立性检验法

7.3 确定阶的AIC准则

2. AIC法对线性定常系...

3. AIC准则与F检验法...

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 6 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit

2. 确定阶的F检验法

Åström(1968)提出的F检验法，引入一个假设检验，将模型阶次的判定问题归结为当从 n_1 增加到 n_2 时， $J_2(n_2)$ 较 $J_2(n_1)$ 下降是否显著的问题。

Åström曾经证明，当 N 足够大时，若 $n_2 > n_1 \geq n$ (对象的阶)成立，则

$$\frac{N}{\sigma_{\varepsilon_1}^2} J_2(n_1) \sim \chi^2(N - 2n_1) \quad (7)$$

$$\frac{N}{\sigma_{\varepsilon_1}^2} J_2(n_2) \sim \chi^2(N - 2n_2) \quad (8)$$

$$\frac{N}{\sigma_{\varepsilon_1}^2} (J_2(n_1) - J_2(n_2)) \sim \chi^2(2n_2 - 2n_1) \quad (9)$$

且 $J_2(n_2)$ 和 $J_2(n_1) - J_2(n_2)$ 是相互独立的随机变量。



7.2 根据残差特性判定...

2. 确定阶的F检验法

3. 方程误差独立性检验法

7.3 确定阶的AIC准则

2. AIC法对线性定常系...

3. AIC准则与F检验法...

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 6 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit

2. 确定阶的F检验法

Åström(1968)提出的F检验法, 引入一个假设检验, 将模型阶次的判定问题归结为当从 n_1 增加到 n_2 时, $J_2(n_2)$ 较 $J_2(n_1)$ 下降是否显著的问题。

Åström曾经证明, 当 N 足够大时, 若 $n_2 > n_1 \geq n$ (对象的阶)成立, 则

$$\frac{N}{\sigma_{\varepsilon_1}^2} J_2(n_1) \sim \chi^2(N - 2n_1) \quad (7)$$

$$\frac{N}{\sigma_{\varepsilon_1}^2} J_2(n_2) \sim \chi^2(N - 2n_2) \quad (8)$$

$$\frac{N}{\sigma_{\varepsilon_1}^2} (J_2(n_1) - J_2(n_2)) \sim \chi^2(2n_2 - 2n_1) \quad (9)$$

且 $J_2(n_2)$ 和 $J_2(n_1) - J_2(n_2)$ 是相互独立的随机变量。

引入统计量 t :

$$\begin{aligned} t &= \frac{J_2(n_1) - J_2(n_2)}{J_2(n_2)} \cdot \frac{N - 2n_2}{2n_2 - 2n_1} \\ &\sim F(2n_2 - 2n_1, N - 2n_2) \end{aligned}$$

也就是说, 当 $n_2 > n_1 \geq n$ 时, 统计量 t 服从自由度分别为 $2n_2 - 2n_1$ 与 $N - 2n_2$ 的 F 分布。

存在显著性水平 α ，当 $t < t_\alpha$ 时， $n_2 > n_1 \geq n$ 成立，否则， n 比 n_1, n_2 大。



7.2 根据残差特性判定...

2. 确定阶的 F 检验法

3. 方程误差独立性检验法

7.3 确定阶的 AIC 准则

2. AIC 法对线性定常系...

3. AIC 准则与 F 检验法...

Home Page

Title Page



Page 7 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit



存在显著性水平 α ，当 $t < t_\alpha$ 时， $n_2 > n_1 \geq n$ 成立，否则， n 比 n_1, n_2 大。
这里取 $\hat{n} = n_1$ ， $\hat{n} + 1 = n_2$ ，则

$$t(\hat{n}, \hat{n} + 1) = \frac{J_2(\hat{n}) - J_2(\hat{n} + 1)}{J_2(\hat{n} + 1)} \cdot \frac{N - 2\hat{n} - 2}{2}$$
$$\sim F(2, N - 2\hat{n} - 2)$$

7.2 根据残差特性判定...

2. 确定阶的 F 检验法

3. 方程误差独立性检验法

7.3 确定阶的AIC准则

2. AIC法对线性定常系...

3. AIC准则与 F 检验法...

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 7 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit



存在显著性水平 α ，当 $t < t_\alpha$ 时， $n_2 > n_1 \geq n$ 成立，否则， n 比 n_1, n_2 大。这里取 $\hat{n} = n_1$ ， $\hat{n} + 1 = n_2$ ，则

$$\begin{aligned} t(\hat{n}, \hat{n} + 1) &= \frac{J_2(\hat{n}) - J_2(\hat{n} + 1)}{J_2(\hat{n} + 1)} \cdot \frac{N - 2\hat{n} - 2}{2} \\ &\sim F(2, N - 2\hat{n} - 2) \end{aligned}$$

阶次增加， $J_2(\hat{n})$ 减小。令 $t_\alpha = F_\alpha(2, N - 2\hat{n} - 2)$
当 $t(\hat{n}, \hat{n} + 1) < t_\alpha$ ，则 $\hat{n} \geq n_1$ 成立， n_1 即对象的阶。

7.2 根据残差特性判定...

2. 确定阶的F检验法

3. 方程误差独立性检验法

7.3 确定阶的AIC准则

2. AIC法对线性定常系...

3. AIC准则与F检验法...

Home Page

Title Page

◀◀

▶▶

◀

▶

Page 7 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit



存在显著性水平 α ，当 $t < t_\alpha$ 时， $n_2 > n_1 \geq n$ 成立，否则， n 比 n_1, n_2 大。这里取 $\hat{n} = n_1$ ， $\hat{n} + 1 = n_2$ ，则

$$\begin{aligned} t(\hat{n}, \hat{n} + 1) &= \frac{J_2(\hat{n}) - J_2(\hat{n} + 1)}{J_2(\hat{n} + 1)} \cdot \frac{N - 2\hat{n} - 2}{2} \\ &\sim F(2, N - 2\hat{n} - 2) \end{aligned}$$

阶次增加， $J_2(\hat{n})$ 减小。令 $t_\alpha = F_\alpha(2, N - 2\hat{n} - 2)$

当 $t(\hat{n}, \hat{n} + 1) < t_\alpha$ ，则 $\hat{n} \geq n_1$ 成立， n_1 即对象的阶。

令 $\hat{n} = 1, 2, \dots$ ，阶次逐渐增加，用F检验法判断 $\hat{n} \geq n_1$ 是否成立。

7.2 根据残差特性判定...

2. 确定阶的F检验法

3. 方程误差独立性检验法

7.3 确定阶的AIC准则

2. AIC法对线性定常系...

3. AIC准则与F检验法...

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 7 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit



7.2 根据残差特性判定...

2. 确定阶的F检验法

3. 方程误差独立性检验法

7.3 确定阶的AIC准则

2. AIC法对线性定常系...

3. AIC准则与F检验法...

存在显著性水平 α ，当 $t < t_\alpha$ 时， $n_2 > n_1 \geq n$ 成立，否则， n 比 n_1, n_2 大。这里取 $\hat{n} = n_1$ ， $\hat{n} + 1 = n_2$ ，则

$$\begin{aligned} t(\hat{n}, \hat{n} + 1) &= \frac{J_2(\hat{n}) - J_2(\hat{n} + 1)}{J_2(\hat{n} + 1)} \cdot \frac{N - 2\hat{n} - 2}{2} \\ &\sim F(2, N - 2\hat{n} - 2) \end{aligned}$$

阶次增加， $J_2(\hat{n})$ 减小。令 $t_\alpha = F_\alpha(2, N - 2\hat{n} - 2)$

当 $t(\hat{n}, \hat{n} + 1) < t_\alpha$ ，则 $\hat{n} \geq n_1$ 成立， n_1 即对象的阶。

令 $\hat{n} = 1, 2, \dots$ ，阶次逐渐增加，用F检验法判断 $\hat{n} \geq n_1$ 是否成立。

例如，取置信度 $\alpha = 0.05$ ，在 $N = 100, 200, 400$ 和 ∞ 时，从F分布表查得

$$\begin{aligned} F(2, 100) &= 3.09, & F(2, 200) &= 3.04, \\ F(2, 400) &= 3.02, & F(2, \infty) &= 3.00 \end{aligned}$$

因此，当 $N - 2\hat{n} - 2 = 100$ 时，若统计量 $t(\hat{n}, \hat{n} + 1) \leq 3.09$ ，则接受假设，即认为 $J_2(\hat{n})$ 的下降已不显著，判定系统阶次为 \hat{n} ；否则否定假设，继续增加阶次并考察统计量 $t(\hat{n}, \hat{n} + 1)$ 。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 7 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit



7.2 根据残差特性判定...

2. 确定阶的F检验法

3. 方程误差独立性检验法

7.3 确定阶的AIC准则

2. AIC法对线性定常系...

3. AIC准则与F检验法...

例7.2 通过对某个系统输入输出信号的观测，得到一批观测数据 $\{u(k)\}, \{y(k)\}, k = 1, 2, \dots, 400$ 。令模型阶次的试探值分别为 $\hat{n} = 1, 2, \dots, 7$ ，用最小二乘法估计模型参数 a_i, b_i ，算出相应的残差平方和 $J_2(\hat{n})$ 以及统计量 $t(\hat{n}, \hat{n} + 1)$ ，计算结果如表7.1所示。

由表可见，当 \hat{n} 增加时， $J_2(\hat{n})$ 以及 $t(\hat{n}, \hat{n} + 1)$ 都不断下降。当由4增至5时， $t(4, 5) = 3.51$ ，其值大于3.02，表明 $J_2(\hat{n})$ 的减小还是显著的。当 \hat{n} 由5增加到6时， $t(5, 6) = 0.99$ ，其值已小于3.02，表明 $J_2(\hat{n})$ 下降已不显著。因此可定阶为5，而模型的参数就是表中 $\hat{n} = 5$ 时的 a_i, b_i 。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 8 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit



7.2 根据残差特性判定...

2. 确定阶的F检验法

3. 方程误差独立性检验法

7.3 确定阶的AIC准则

2. AIC法对线性定常系...

3. AIC准则与F检验法...

3. 方程误差独立性检验法

模型的残差带有两方面的信息，一是关于参数向量拟合程度的信息，二是系统噪声的信息。如果所估计出的模型与被识系统完全匹配，即模型的类型和结构是合适的，且 $\hat{\theta} = \theta$ ，则模型的残差就等于系统噪声。同时，对噪声也进行了建模，则方程误差应该满足白噪声的统计特性。所以，通过检验方程误差是否为独立的白噪声序列，就可以判定模型的阶次是否合适。

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 9 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit



7.2 根据残差特性判定...

2. 确定阶的F检验法

3. 方程误差独立性检验法

7.3 确定阶的AIC准则

2. AIC法对线性定常系...

3. AIC准则与F检验法...

3. 方程误差独立性检验法

模型的残差带有两方面的信息，一是关于参数向量拟合程度的信息，二是系统噪声的信息。如果所估计出的模型与被识系统完全匹配，即模型的类型和结构是合适的，且 $\hat{\theta} = \theta$ ，则模型的残差就等于系统噪声。同时，对噪声也进行了建模，则方程误差应该满足白噪声的统计特性。所以，通过检验方程误差是否为独立的白噪声序列，就可以判定模型的阶次是否合适。

1. 计算方程误差的自相关函数：

$$R_{ee}(\tau) = \frac{1}{N-\tau} \sum_{k=1}^{N-\tau} \hat{e}(k) \hat{e}(k+\tau) \quad \tau = 1, 2, \dots, M \quad (10)$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 9 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 7.2 根据残差特性判定...
- 2. 确定阶的F检验法
- 3. 方程误差独立性检验法
- 7.3 确定阶的AIC准则
- 2. AIC法对线性定常系...
- 3. AIC准则与F检验法...

2. 检验自相关函数是否为

$$R_{ee}(\tau) = \begin{cases} \text{非零}, & \tau = 0 \\ 0, & \tau \neq 0 \end{cases} \quad (11)$$

实际上， $R_{ee}(\tau)$ 不会恰好都等于零，其值必然是在零值附近摆动。为了判断 $R_{ee}(\tau)$ 与零值之间的接近程度，方法之一是，当自相关函数的延时量为 $\tau = 1, 2, \dots, M$ 时，计算 $R_{ee}(\tau)$ 的符号的变更数目，要求符号变更次数应近似地为 $M/2$ 。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 10 of 18](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



7.2 根据残差特性判定...
2. 确定阶的F检验法
3. 方程误差独立性检验法
7.3 确定阶的AIC准则
2. AIC法对线性定常系...
3. AIC准则与F检验法...

2. 检验自相关函数是否为

$$R_{ee}(\tau) = \begin{cases} \text{非零}, & \tau = 0 \\ 0, & \tau \neq 0 \end{cases} \quad (11)$$

实际上, $R_{ee}(\tau)$ 不会恰好都等于零, 其值必然是在零值附近摆动。为了判断 $R_{ee}(\tau)$ 与零值之间的接近程度, 方法之一是, 当自相关函数的延时量为 $\tau = 1, 2, \dots, M$ 时, 计算 $R_{ee}(\tau)$ 的符号的变更数目, 要求符号变更次数应近似地为 $M/2$ 。

3. 若方程误差序列为零均值、不相关的序列, 这时的阶即期望的阶。具体操作上, 选用不同阶次的模型, 试探模型的阶次对于方程误差相关性的影响。对于方程误差接近于白噪声来说, $R_{ee}(\tau)$ 不再有显著的改善。所以根据方程误差相关性判定模型的阶次时, 应选择相关性不再显著降低, 而模型阶次数又比较低的那个阶次作为模型的合适的阶次。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 10 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 7.2 根据残差特性判定...
- 2. 确定阶的F检验法
- 3. 方程误差独立性检验法
- 7.3 确定阶的AIC准则
- 2. AIC法对线性定常系...
- 3. AIC准则与F检验法...

7.3 确定阶的AIC准则

1. AIC准则

Akaika(赤池, 1972)提出一种具有客观标准的阶次判定方法, 所采用阶次判定准则为

$$AIC(n_\theta) = -2 \ln L(\hat{\theta}, n) + 2n_\theta \quad (12)$$

其中 n_θ 表示 n 阶模型未知参数的个数, $\hat{\theta}$ 表示参数的极大似然估计值, $L(\hat{\theta}, n)$ 为似然函数, 反映了拟合精度。该准则称为AIC准则(Akaika Information Criterion)。Akaika证明了, 使 $AIC(n_\theta)$ 为极小的阶 \hat{n} , 即系统的阶。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 11 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 7.2 根据残差特性判定...
- 2. 确定阶的F检验法
- 3. 方程误差独立性检验法
- 7.3 确定阶的AIC准则
- 2. AIC法对线性定常系...
- 3. AIC准则与F检验法...

7.3 确定阶的AIC准则

1. AIC准则

Akaika(赤池, 1972)提出一种具有客观标准的阶次判定方法, 所采用阶次判定准则为

$$AIC(n_{\theta}) = -2 \ln L(\hat{\theta}, n) + 2n_{\theta} \quad (12)$$

其中 n_{θ} 表示 n 阶模型未知参数的个数, $\hat{\theta}$ 表示参数的极大似然估计值, $L(\hat{\theta}, n)$ 为似然函数, 反映了拟合精度。该准则称为AIC准则(Akaika Information Criterion)。Akaika证明了, 使 $AIC(n_{\theta})$ 为极小的阶 \hat{n} , 即系统的阶。

这里对AIC准则作一个定性的解释。设系统模型阶次为 n , 当阶次估计值 \hat{n} 小于 n 时, AIC准则中 $\ln L(\hat{\theta}, n)$ 数值较大, 起主导作用。随着 \hat{n} 的增加而增大, 这时 $AIC(n_{\theta})$ 随 \hat{n} 的增加而下降。当阶次估计值达到并超过 n 时, $\ln L(\hat{\theta}, n)$ 的增长变慢, 而 $2\hat{n}$ 项则随 \hat{n} 的增加不断增大, 并起主导作用, 这时 $AIC(n_{\theta})$ 随 \hat{n} 的增加而增大。因此, $AIC(n_{\theta})$ 在 $\hat{n} = n$ 处形成一个最小值。

[Home Page](#)[Title Page](#)

Page 11 of 18

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



2. AIC法对线性定常系统定阶

设SISO系统可用如下线性模型描述

$$y(k) = \varphi_k^T \theta + \varepsilon(k) \quad (13)$$

其中 $\{\varepsilon(k)\}$ 为独立的正态分布 $N(0, \sigma^2)$ 序列，即白噪声序列。它在 $\hat{\theta}$ 条件下的似然函数为

$$L(\hat{\theta}, n) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{N}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (Y - \Phi\theta)^T (Y - \Phi\theta) \right\} \quad (14)$$

对应的对数为

$$-2 \ln L(\hat{\theta}, n) = N \ln \sigma^2 - N \ln 2\pi + \frac{1}{\sigma^2} (Y - \Phi\theta)^T (Y - \Phi\theta) \quad (15)$$

7.2 根据残差特性判定...

2. 确定阶的F检验法

3. 方程误差独立性检验法

7.3 确定阶的AIC准则

2. AIC法对线性定常系...

3. AIC准则与F检验法...

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 12 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 7.2 根据残差特性判定...
- 2. 确定阶的F检验法
- 3. 方程误差独立性检验法
- 7.3 确定阶的AIC准则
- 2. AIC法对线性定常系...
- 3. AIC准则与F检验法...

2. AIC法对线性定常系统定阶

设SISO系统可用如下线性模型描述

$$y(k) = \varphi_k^T \theta + \varepsilon(k) \quad (13)$$

其中 $\{\varepsilon(k)\}$ 为独立的正态分布 $N(0, \sigma^2)$ 序列，即白噪声序列。它在 $\hat{\theta}$ 条件下的似然函数为

$$L(\hat{\theta}, n) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{N}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (Y - \Phi\theta)^T (Y - \Phi\theta) \right\} \quad (14)$$

对应的对数为

$$-2 \ln L(\hat{\theta}, n) = N \ln \sigma^2 - N \ln 2\pi + \frac{1}{\sigma^2} (Y - \Phi\theta)^T (Y - \Phi\theta) \quad (15)$$

根据极大似然原理，模型参数 θ 和噪声 $\varepsilon(k)$ 的方差 σ_ε^2 的估计为

$$\begin{cases} \hat{\theta}_{ML} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y \\ \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{N} (Y - \Phi \hat{\theta}_{ML})^T (Y - \Phi \hat{\theta}_{ML}) \end{cases} \quad (16)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 12 of 18](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

将上式代入式(15)，得

$$-2 \ln L(\hat{\theta}, n) = \text{const} + N \ln \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 \quad (17)$$



- 7.2 根据残差特性判定...
- 2. 确定阶的F检验法
- 3. 方程误差独立性检验法
- 7.3 确定阶的AIC准则
- 2. AIC法对线性定常系...
- 3. AIC准则与F检验法...

Home Page

Title Page



Page 13 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 7.2 根据残差特性判定...
- 2. 确定阶的F检验法
- 3. 方程误差独立性检验法
- 7.3 确定阶的AIC准则
- 2. AIC法对线性定常系...
- 3. AIC准则与F检验法...

将上式代入式(15)，得

$$-2 \ln L(\hat{\theta}, n) = \text{const} + N \ln \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 \quad (17)$$

将式(17)代入式(12)，并去掉常数项，得AIC准则为

$$AIC(n_{\theta}) = N \ln \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 + 2n_{\theta} \quad (18)$$

(1) 对 $AR(n)$ 模型，由于未知参数个数 n_{θ} 为 \hat{n} ，所以AIC准则为

$$AIC(\hat{n}) = N \ln \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 + 2\hat{n} \quad (19)$$

在判定阶次时，将 $AIC(\hat{n})$ 对 \hat{n} 求极小值，即可确定最佳的阶次 \hat{n} 。

[Home Page](#)[Title Page](#)

Page 13 of 18

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



将上式代入式(15)，得

$$-2 \ln L(\hat{\theta}, n) = \text{const} + N \ln \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 \quad (17)$$

将式(17)代入式(12)，并去掉常数项，得AIC准则为

$$AIC(n_{\theta}) = N \ln \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 + 2n_{\theta} \quad (18)$$

(1) 对 $AR(n)$ 模型，由于未知参数个数 n_{θ} 为 \hat{n} ，所以AIC准则为

$$AIC(\hat{n}) = N \ln \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 + 2\hat{n} \quad (19)$$

在判定阶次时，将 $AIC(\hat{n})$ 对 \hat{n} 求极小值，即可确定最佳的阶次 \hat{n} 。

(2) 对于平稳正态零均值的一维 $ARMA(n_a, n_b)$ 模型，AIC准则为

$$AIC(\hat{n}_a, \hat{n}_b) = N \ln \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 + 2(\hat{n}_a + \hat{n}_b) \quad (20)$$

7.2 根据残差特性判定...

2. 确定阶的F检验法

3. 方程误差独立性检验法

7.3 确定阶的AIC准则

2. AIC法对线性定常系...

3. AIC准则与F检验法...

Home Page

Title Page



Page 13 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit



(3) 对于有色噪声模型
SISO过程用下列ARMAX模型描述

$$y(k-1) + \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) = \sum_{i=1}^n b_i u(k-i) + \nu(k) + \sum_{i=1}^m d_i \nu(k-i) \quad (21)$$

其中 $\{\nu(k)\}$ 为零均值， $N(0, \sigma_\nu^2)$ 分布的不相关白噪声。AIC准则为

$$AIC(\hat{n}, \hat{m}) = N \ln \hat{\sigma}_\nu^2 + 2(2\hat{n} + \hat{m}) \quad (22)$$

对于不同的 \hat{n}, \hat{m} ，分别计算 $AIC(\hat{n}, \hat{m})$ 值，取使其最小的 \hat{n} 和 \hat{m} 为模型的阶次。

7.2 根据残差特性判定...

2. 确定阶的F检验法

3. 方程误差独立性检验法

7.3 确定阶的AIC准则

2. AIC法对线性定常系...

3. AIC准则与F检验法...

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 14 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit



(3) 对于有色噪声模型
SISO过程用下列ARMAX模型描述

$$y(k-1) + \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) = \sum_{i=1}^n b_i u(k-i) + \nu(k) + \sum_{i=1}^m d_i \nu(k-i) \quad (21)$$

其中 $\{\nu(k)\}$ 为零均值， $N(0, \sigma_\nu^2)$ 分布的不相关白噪声。AIC准则为

$$AIC(\hat{n}, \hat{m}) = N \ln \hat{\sigma}_\nu^2 + 2(2\hat{n} + \hat{m}) \quad (22)$$

对于不同的 \hat{n}, \hat{m} ，分别计算 $AIC(\hat{n}, \hat{m})$ 值，取使其最小的 \hat{n} 和 \hat{m} 为模型的阶次。

例7.3 考虑如下仿真对象

$$\begin{aligned} & y(k) - 2.851y(k-1) + 2.717y(k-2) - 0.865y(k-3) \\ &= u(k-1) + u(k-2) + u(k-3) + \nu(k) + 0.7\nu(k-1) + 0.2\nu(k-2) \end{aligned}$$

其中 $\nu(k)$ 是服从 $N(0, 1)$ 的不相关噪声；输入信号 $u(k)$ 采用幅值为1的M序列。辨识模型采用式(21)的形式。数据长度 $N = 300$ ，取 $\hat{n} = \hat{m} = 1, 2, 3, 4$ ，用预报误差法估计模型参数，进而计算出 $AIC(\hat{n}, \hat{m})$ ，结果如表7.2所示。当 $\hat{n} = \hat{m} = 3$ 时， $AIC(\hat{n}, \hat{m})$ 最小，故可用3阶的差分方程来描述对象，所得模型与仿真对象的数学模型相近。

7.2 根据残差特性判定...

2. 确定阶的F检验法

3. 方程误差独立性检验法

7.3 确定阶的AIC准则

2. AIC法对线性定常系...

3. AIC准则与F检验法...

Home Page

Title Page



Page 14 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 7.2 根据残差特性判定 ...
2. 确定阶的 F 检验法
3. 方程误差独立性检验法
- 7.3 确定阶的 AIC 准则
2. AIC 法对线性定常系 ...
3. AIC 准则与 F 检验法 ...

表7.2 不同阶数下的目标函数和AIC准则

$n = m$	a_i	b_i	d_i	$J(n)$	$AIC(n, m)$
1	$a_1 = -0.995$	$b_1 = 0.42$	$d_1 = 1.01$	1055.3	6.98
2	$a_1 = -1.979$ $a_2 = 0.985$	$b_1 = 0.267$ $b_2 = -0.501$	$d_1 = 1.502$ $d_2 = 0.870$	3.79	1.37
3	$a_1 = -2.854$ $a_2 = 2.721$ $a_3 = -0.873$	$b_1 = 1.069$ $b_2 = 1.081$ $b_3 = 0.954$	$d_1 = 0.725$ $d_2 = 0.222$ $d_3 = -0.035$	1.071	0.13
4	$a_1 = -1.874$ $a_2 = -0.094$ $a_3 = 1.837$ $a_4 = -0.871$	$b_1 = 1.084$ $b_2 = 2.149$ $b_3 = 1.964$ $b_4 = 0.921$	$d_1 = 1.747$ $d_2 = 0.975$ $d_3 = 0.201$ $d_4 = -0.029$	1.065	0.15

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 15 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit



仿真源程序example7_3.m如下:

```
clear all;    N=300;
A=[1 -2.851 2.717 -0.865]; B=[0 1 1 1]; C=[1 0.7 0.2];
M1=idpoly(A, B, C);
u=idinput(N, 'prbs', [0 1]);
e=NORMRND(0, 1, N, 1);
y1=sim(M1, [u e]);
Q=IDDATA(y1, u);
AIC=zeros(5,5);
for i=1:5
    for j=1:i
        Model=armax(Q,'na',i,'nb',j,'nc',i,'nk',1);
        AIC(i,j)=aic(Model);
    end
    Model
end
AIC
```

% 观测数据长度
% 模型的参数
% ARMAX模型
% 输入伪随机信号
% 随机噪声
% 模型仿真
% 获得一批输入输出数据

% ARMA(na,nc)模型中的na
% ARMA(na,nc)模型中的nc
% 不同阶次系统的辨识
% 辨识结果的AIC准则

% 输出模型

% 输出AIC矩阵

7.2 根据残差特性判定...
2. 确定阶的F检验法
3. 方程误差独立性检验法
7.3 确定阶的AIC准则
2. AIC法对线性定常系...
3. AIC准则与F检验法...

Home Page

Title Page

« »

◀ ▶

Page 16 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit



3. AIC准则与F检验法的关系

F检验法通过假设检验方法对方程误差的方差进行显著性检验，从而确定模型的阶次。AIC准则法要建立一个准则函数，通过极小化这个准则函数来确定模型的阶次。可见，这两种定阶方法的基本思想是不一样的。但是，它们之间存在着密切联系，如果选择适当的风险水平 α ，F检验法和AIC准则法是等价的。

7.2 根据残差特性判定...

2. 确定阶的F检验法

3. 方程误差独立性检验法

7.3 确定阶的AIC准则

2. AIC法对线性定常系...

3. AIC准则与F检验法...

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 17 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 7.2 根据残差特性判定...
- 2. 确定阶的F检验法
- 3. 方程误差独立性检验法
- 7.3 确定阶的AIC准则
- 2. AIC法对线性定常系...
- 3. AIC准则与F检验法...

3. AIC准则与F检验法的关系

F检验法通过假设检验对方程误差的方差进行显著性检验，从而确定模型的阶次。AIC准则法要建立一个准则函数，通过极小化这个准则函数来确定模型的阶次。可见，这两种定阶方法的基本思想是不一样的。但是，它们之间存在着密切联系，如果选择适当的风险水平 α ，F检验法和AIC准则法是等价的。

考虑ARMA模型 M_1 的阶为 n_1 ， M_2 的阶为 n_2 。如果采用AIC准则法，有

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{N} \hat{\varepsilon}^T \hat{\varepsilon} = V(n) \quad (23)$$

$$AIC(n_1) = N \ln V(n_1) + 4n_1 \quad (24)$$

$$AIC(n_2) = N \ln V(n_2) + 4n_2 \quad (25)$$

判定当 $AIC(n_1) - AIC(n_2) > 0$ 时，取模型为 M_2 ；
而当 $AIC(n_1) - AIC(n_2) < 0$ 时，取模型为 M_1 。

[Home Page](#)[Title Page](#)

Page 17 of 18

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

因此,

$$AIC(n_1) - AIC(n_2) = N \ln \frac{V(n_1)}{V(n_2)} + 4(n_1 - n_2) > 0 \quad (26)$$

即

$$\frac{V(n_1)}{V(n_2)} > \exp \left\{ \frac{4(n_2 - n_1)}{N} \right\} \quad (27)$$

上式成立时, 取模型 M_2 。上式也可写成

$$\frac{V(n_1) - V(n_2)}{V(n_2)} \cdot \frac{N - 2n_2}{2(n_2 - n_1)} > \left(\exp \left\{ \frac{4(n_2 - n_1)}{N} \right\} - 1 \right) \cdot \frac{N - 2n_2}{2(n_2 - n_1)} \quad (28)$$



7.2 根据残差特性判定...

2. 确定阶的 F 检验法

3. 方程误差独立性检验法

7.3 确定阶的 AIC 准则

2. AIC 法对线性定常系...

3. AIC 准则与 F 检验法...

Home Page

Title Page



Page 18 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit

因此,

$$AIC(n_1) - AIC(n_2) = N \ln \frac{V(n_1)}{V(n_2)} + 4(n_1 - n_2) > 0 \quad (26)$$

即

$$\frac{V(n_1)}{V(n_2)} > \exp \left\{ \frac{4(n_2 - n_1)}{N} \right\} \quad (27)$$

上式成立时, 取模型 M_2 。上式也可写成

$$\frac{V(n_1) - V(n_2)}{V(n_2)} \cdot \frac{N - 2n_2}{2(n_2 - n_1)} > \left(\exp \left\{ \frac{4(n_2 - n_1)}{N} \right\} - 1 \right) \cdot \frac{N - 2n_2}{2(n_2 - n_1)} \quad (28)$$

上式即相当于F检验法: $t > t_\alpha$, 在显著性水平 α 之下, 采用 M_2 模型。F检验法中, $\hat{n} = n_1, n_2 = n_1 + 1$, 则上式右边为

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\exp \left\{ \frac{4}{N} \right\} - 1 \right) \cdot \frac{N - 2\hat{n} - 2}{2} = 2.0 \quad (29)$$

右边几乎为常数2.0, 即相当于风险水平 $\alpha \approx 0.15$ 的 $t_\alpha = F_\alpha(2, N - 2\hat{n} - 2)$ 值。

以上分析可以看出, AIC法与F检验法渐近等价, AIC准则法相当于当风险水平取 $\alpha = 0.15$ 时的F检验法。



7.2 根据残差特性判定...

2. 确定阶的F检验法

3. 方程误差独立性检验法

7.3 确定阶的AIC准则

2. AIC法对线性定常系...

3. AIC准则与F检验法...

Home Page

Title Page



Page 18 of 18

Go Back

Full Screen

Close

Quit