



## 第5章 辨识的最小二乘法

### 5.7 辅助变量法

### 5.8 相关最小二乘法

### 5.9 多阶段最小二乘法

作者：李鹏波、胡德文

单位：国防科技大学机电工程与自动化学院

Email: [gaoxia73@163.com](mailto:gaoxia73@163.com)

中国水利水电出版社版权所有



5.7 辅助变量法

5.8 相关最小二乘法

5.9 多阶段最小二乘法

Home Page

Title Page



Page 1 of 34

Go Back

Full Screen

Close

Quit



5.7 辅助变量法

5.8 相关最小二乘法

5.9 多阶段最小二乘法

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 2 of 34

Go Back

Full Screen

Close

Quit

## 第5章 辨识的最小二乘法

### 5.7 辅助变量法

#### 1. 一次完成算法

#### 2. 辅助变量的选择

#### 3. 辅助变量递推算法

### 5.8 相关最小二乘法

### 5.9 多阶段最小二乘法



5.7 辅助变量法  
5.8 相关最小二乘法  
5.9 多阶段最小二乘法

## 5.7 辅助变量法

### 1. 一次完成算法

辅助变量法也称为工具变量法(Instrumental Variable, IV)。对于线性模型

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + e(k) \quad (1)$$

从加权最小二乘法出发,

$$W = Z \cdot Z^T \quad (2)$$

即加权阵 $W$ 为正定对称阵。目标函数为

$$J = \hat{e}^T W \hat{e} \quad (3)$$

则加权最小二乘估计为

$$\hat{\theta}_{WLS} = (\Phi^T Z \cdot Z^T \Phi)^{-1} \Phi^T Z \cdot Z^T Y \quad (4)$$

Home Page

Title Page



Page 3 of 34

Go Back

Full Screen

Close

Quit

只要  $\frac{1}{N}\Phi^T Z$  为非奇异,  $\forall N$ 。则得到估计值

$$\hat{\theta}_{IV} = (Z^T \Phi)^{-1} Z^T Y \quad (5)$$

或

$$\hat{\theta}_{IV} = (Z^T \Phi)^{-1} Z^T (\Phi \theta + e) = \theta + (Z^T \Phi)^{-1} Z^T e \quad (6)$$



5.7 辅助变量法

5.8 相关最小二乘法

5.9 多阶段最小二乘法

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 4 of 34

Go Back

Full Screen

Close

Quit



只要 $\frac{1}{N}\Phi^T Z$  为非奇异,  $\forall N$ 。则得到估计值

$$\hat{\theta}_{IV} = (Z^T \Phi)^{-1} Z^T Y \quad (5)$$

或

$$\hat{\theta}_{IV} = (Z^T \Phi)^{-1} Z^T (\Phi \theta + e) = \theta + (Z^T \Phi)^{-1} Z^T e \quad (6)$$

上述估计值 $\hat{\theta}_{IV}$ 渐近无偏的条件为:

- (1)  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} Z^T \Phi$  为非奇异阵;
- (2)  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} Z^T e = 0$ , 即 $Z$ 与 $e$ 独立。

5.7 辅助变量法

5.8 相关最小二乘法

5.9 多阶段最小二乘法

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 4 of 34

Go Back

Full Screen

Close

Quit



只要 $\frac{1}{N}\Phi^T Z$  为非奇异,  $\forall N$ 。则得到估计值

$$\hat{\theta}_{IV} = (Z^T \Phi)^{-1} Z^T Y \quad (5)$$

或

$$\hat{\theta}_{IV} = (Z^T \Phi)^{-1} Z^T (\Phi \theta + e) = \theta + (Z^T \Phi)^{-1} Z^T e \quad (6)$$

上述估计值 $\hat{\theta}_{IV}$ 渐近无偏的条件为:

- (1)  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} Z^T \Phi$  为非奇异阵;
- (2)  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} Z^T e = 0$ , 即 $Z$ 与 $e$ 独立。

$Z$ 称为辅助变量矩阵,  $Z$ 的元素称为辅助变量。 $Z$ 阵的选择要与噪声无关, 但要与数据阵 $\Phi$ 紧密相关。如果所用的辅助变量满足上述两个条件, 则有

$$\hat{\theta}_{IV} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \theta \quad w.p.1 \quad (7)$$

上式 $\hat{\theta}_{IV}$ 称作辅助变量参数估计值。可见, 只要适当选择辅助变量, 使之满足上述两个条件, 参数估计值 $\hat{\theta}_{IV}$ 就可以是无偏一致估计。

5.7 辅助变量法

5.8 相关最小二乘法

5.9 多阶段最小二乘法

Home Page

Title Page



Page 4 of 34

Go Back

Full Screen

Close

Quit



5.7 辅助变量法

5.8 相关最小二乘法

5.9 多阶段最小二乘法

## 2. 辅助变量的选择

所选择的辅助变量应与 $e(k)$ 不相关，但与 $u(k)$ 和 $\Phi$ 中的 $y(k)$ 强烈相关。下面介绍几种常用的选择方法。

方法1: 迭代辅助变量算法

$$Z = \begin{bmatrix} -w(n) & \cdots & -w(1) & u(n+1) & \cdots & u(1) \\ -w(n+1) & \cdots & -w(2) & u(n+2) & \cdots & u(2) \\ \vdots & & & & & \vdots \\ -w(n+N-1) & \cdots & -w(N) & u(n+N) & \cdots & u(N) \end{bmatrix} \quad (8)$$

上式 $\{w(k)\}$ 为理想系统的输出，即理想系统的模型为

$$A(z^{-1})w(k) = B(z^{-1})u(k) \quad (9)$$

式中 $A(z^{-1})$ 和 $B(z^{-1})$ 的系数正是要辨识的参数，如何得到 $w(k)$ 呢？可以通过迭代算法求解。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 5 of 34

Go Back

Full Screen

Close

Quit



5.7 辅助变量法

5.8 相关最小二乘法

5.9 多阶段最小二乘法

先用最小二乘法求粗略的 $\hat{\theta}$ ，再将 $\hat{\theta}$ 代入式(9)，得到 $w(k)$ 。再根据式(8)构造辅助变量阵，利用式(5)求取 $\theta$ 的辅助变量估计值 $\hat{\theta}_{IV}$ ，然后再将 $\hat{\theta}_{IV}$ 代入式(9)再次求得 $w(k)$ 。如此循环递推估计辅助变量参数，直到取得满意的辨识结果为止。

### 方法2: 自适应滤波法

这种方法所选择的辅助变量 $w(k)$ 和辅助变量矩阵 $Z$ 的形式与上一种方法完全相同，只是辅助模型中参数向量 $\hat{\theta}$ 的估计方法与上一种方法有所不同。取

$$\hat{\theta}(k) = (1 - \alpha)\hat{\theta}(k - 1) + \alpha\hat{\theta}(k - d) \quad (10)$$

式中 $\alpha$ 取 $0.01 \sim 0.1$ ， $d$ 取 $0 \sim 10$ ， $\hat{\theta}(k)$ 为 $k$ 时刻所得到的参数向量估计值。当模型式(1)中的噪声 $e(k)$ 与 $u(k)$ 无关，且 $u(k)$ 是持续激励信号时，所选的辅助变量可满足上述两个条件。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 6 of 34

Go Back

Full Screen

Close

Quit





5.7 辅助变量法

5.8 相关最小二乘法

5.9 多阶段最小二乘法

### 方法3: 纯滞后

只利用输入作辅助变量, 辅助变量阵为

$$Z = \begin{bmatrix} u(2n) & \cdots & u(0) \\ \vdots & & \\ u(2n + N - 1) & \cdots & u(N - 1) \end{bmatrix} \quad (11)$$

只要输入信号 $u(k)$ 是持续激励信号, 且与噪声 $e(k)$ 无关, 则辅助变量可满足上述两个条件。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 7 of 34

Go Back

Full Screen

Close

Quit



#### 方法4: Tally原理

如果噪声 $e(k)$ 可看成下列MA模型的输出

$$e(k) = D(z^{-1})\varepsilon(k) \quad (12)$$

其中 $\varepsilon(k)$ 是零均值的不相关随机噪声，且

$$D(z^{-1}) = 1 + d_1 z^{-1} + \cdots + d_m z^{-m} \quad (13)$$

则辅助变量取作

$$w(k) = y(k - D), \quad D \geq m \quad (14)$$

相应的辅助变量阵利用延迟后的输出和输入作辅助变量，即

$$Z = \begin{bmatrix} -y(n - D - 1) & \cdots & -y(-D) & u(n) & \cdots & u(0) \\ & & \vdots & & & \\ -y(n - D + N - 2) & \cdots & -y(N - D - 1) & u(n + N - 1) & \cdots & u(N - 1) \end{bmatrix} \quad (15)$$

其中延迟 $D \geq$ 噪声模型MA的阶次。

5.7 辅助变量法

5.8 相关最小二乘法

5.9 多阶段最小二乘法

Home Page

Title Page



Page 8 of 34

Go Back

Full Screen

Close

Quit



### 3. 辅助变量递推算法

系统为线性差分方程模型

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + e(k) \quad (16)$$

$N$ 个观测数据时的估值和协方差阵分别为

$$\hat{\theta} = [W_N^T \Phi_N]^{-1} W_N^T Y_N \quad (17)$$

$$P_N = [W_N^T \Phi_N]^{-1} \quad (18)$$

新增一个观测数据 $y_{N+1}$ ，则协方差阵

$$\begin{aligned} P_{N+1} &= \left[ \begin{pmatrix} W_N \\ w_{N+1}^T \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \Phi_N \\ \varphi_{N+1}^T \end{pmatrix} \right]^{-1} \\ &= [P_N^{-1} + w_{N+1} \varphi_{N+1}^T]^{-1} \end{aligned}$$

5.7 辅助变量法

5.8 相关最小二乘法

5.9 多阶段最小二乘法

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 9 of 34

Go Back

Full Screen

Close

Quit



5.7 辅助变量法

5.8 相关最小二乘法

5.9 多阶段最小二乘法

递推算法如下：

$$\hat{\theta}_{N+1} = \hat{\theta}_N + G_{N+1}[y_{N+1} - \varphi_{N+1}^T \hat{\theta}_N] \quad (19)$$

$$G_{N+1} = \frac{P_N w_{N+1}}{1 + \varphi_{N+1}^T P_N w_{N+1}} \quad (20)$$

$$P_{N+1} = \left[ I - \frac{P_N w_{N+1} \varphi_{N+1}^T}{1 + \varphi_{N+1}^T P_N w_{N+1}} \right] P_N \quad (21)$$

其中

$$\varphi_N^T = \begin{bmatrix} -y_{N-1} & \cdots & -y_{N-n} & u_{N-1} & \cdots & u_{N-n} \end{bmatrix}$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 10 of 34

Go Back

Full Screen

Close

Quit



5.7 辅助变量法

5.8 相关最小二乘法

5.9 多阶段最小二乘法

辅助模型为

$$\begin{cases} w_N^T = \begin{bmatrix} -x_{N-1} & \cdots & -x_{N-n} & u_{N-1} & \cdots & u_{N-n} \end{bmatrix} \\ x_N = w_N^T \hat{\theta}_N \end{cases} \quad (22)$$

初值:  $P_0 = \alpha_2 I$ ,  $\alpha$  充分大。

$$\hat{\theta}_0 = 0, \quad x_0 = x_{-1} = \cdots = x_{-n} = 0$$

缺点: 对  $P_0$  的选取很敏感。

改进: 50~100点用递推最小二乘, 再转入IV递推, 则效果较好。

Home Page

Title Page

◀▶

◀▶

Page 11 of 34

Go Back

Full Screen

Close

Quit



5.7 辅助变量法

5.8 相关最小二乘法

5.9 多阶段最小二乘法

## 5.8 相关最小二乘法

相关-最小二乘法(Correlation-Least Square, COR-LS)是一种用两步法估计出参数模型的参数值的辨识方法。首先用相关分析法辨识系统的脉冲响应函数, 确定出被识系统的非参数模型, 然后再应用最小二乘法将非参数模型拟合成参数模型。

假设系统的输入 $\{u(k)\}$ 和输出 $\{y(k)\}$ 都是各态历经的平稳随机序列。当观测到输入输出数据后, 就可以估计出其输入信号的自相关函数 $R_u(\tau)$ 和输入输出信号之间的互相关函数 $R_{uy}(\tau)$

$$\begin{cases} R_u(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u(k-\tau)u(k) \\ R_{uy}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u(k-\tau)y(k) \end{cases} \quad (23)$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 12 of 34

Go Back

Full Screen

Close

Quit



5.7 辅助变量法

5.8 相关最小二乘法

5.9 多阶段最小二乘法

如果数据长度 $N$ 有限，相关函数的计算采用数值计算。利用这些观测数据，我们可分别估算出离散的自相关函数 $\hat{R}_u(\tau)$ 和离散的互相关函数 $\hat{R}_{uy}(\tau)$ 为：

$$\begin{cases} \hat{R}_u(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u(k-\tau)u(k) \\ \hat{R}_{uy}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u(k-\tau)y(k) \end{cases} \quad (24)$$

它们之间的关系可由Wiener-Hopf方程来描述，即

$$R_{uy}(\tau) = \sum_{i=0}^{N-1} g(i)R_u(i-\tau) \quad (25)$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 13 of 34

Go Back

Full Screen

Close

Quit



5.7 辅助变量法

5.8 相关最小二乘法

5.9 多阶段最小二乘法

根据系统的输入输出数据，如果已经求出不同时延值下的 $R_u(\tau)$ 和 $R_{uy}(\tau)$ ,  $\tau = 1, 2, \dots, p$ . 则由方程式(25)可得到一组代数方程。由此，可求解出不同时刻脉冲响应的值

$$\mathbf{G} = [g(1) \ g(1) \ \cdots \ g(p)]^T$$

这是我们已介绍过的相关分析法。

在相关-最小二乘法中，我们要再利用脉冲响应序列和来估计出系统的参数模型。设系统的参数模型为阶次为 $n$ 的随机差分方程：

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - \cdots - a_n y(k-n) + b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \cdots + b_n u(k-n) + e(k) \quad (26)$$

假设输入信号 $\{u(k)\}$ 与随机噪声序列 $\{e(k)\}$ 是不相关的。上式两边乘以 $u(k-\tau)$ ，并取期望值，得到

$$R_{uy}(\tau) = -a_1 R_{uy}(\tau-1) - \cdots - a_n R_{uy}(\tau-n) + b_0 R_u(\tau) + b_1 R_u(\tau-1) + \cdots + b_n R_u(\tau-n) \quad (27)$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 14 of 34

Go Back

Full Screen

Close

Quit





5.7 辅助变量法

5.8 相关最小二乘法

5.9 多阶段最小二乘法

上式写成最小二乘格式

$$\hat{R}_{uy}(\tau) = \hat{\varphi}^T(\tau)\theta + e(\tau) \quad (28)$$

其中 $e(\tau)$ 表示相关函数用对应的估计值代替后所造成的误差。且

$$\begin{cases} \varphi(\tau) = [-\hat{R}_{uy}(\tau-1) \cdots -\hat{R}_{uy}(\tau-n) \hat{R}_u(\tau) \cdots R_u(\tau-n)]^T \\ \theta = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n \ b_1 \ \cdots \ b_n]^T \end{cases}$$

令 $\tau = 1, 2, \cdots, N$ ，则可得矩阵方程

$$\hat{R}_{uy,N} = \Phi_N \theta + E_N \quad (29)$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 15 of 34

Go Back

Full Screen

Close

Quit



5.7 辅助变量法

5.8 相关最小二乘法

5.9 多阶段最小二乘法

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 16 of 34

Go Back

Full Screen

Close

Quit

其中

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{R}_{uy,N} = [\hat{R}_{uy}(1) \ \hat{R}_{uy}(2) \cdots \hat{R}_{uy}(N)]^T \\ E_N = [e(1) \ e(2) \cdots e(N)]^T \\ \Phi_N = \begin{bmatrix} \varphi^T(1) \\ \varphi^T(2) \\ \cdots \\ \varphi^T(N) \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

这时就可用基本的最小二乘法得到相关一最小二乘法的估计值 $\hat{\theta}_{COR-LS}$ 为

$$\hat{\theta}_{COR-LS} = (\Phi_N^T \Phi_N)^{-1} \Phi_N^T \hat{R}_{uy,N} \quad (30)$$

下面以白噪声信号或伪随机二位式信号作为系统的输入测试信号，讨论如何应用或估计出系统参数模型中的参数。



5.7 辅助变量法  
5.8 相关最小二乘法  
5.9 多阶段最小二乘法

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 17 of 34

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

## 1. 白噪声输入信号

当输入信号为白噪声时，其自相关函数为

$$R_u(\tau) = \begin{cases} \sigma^2 & \tau = 0 \\ 0 & \tau \neq 0 \end{cases} \quad (31)$$

这时，Wiener-Hopf方程简化为

$$R_{uy}(\tau) = g(\tau)R_u(0) = \sigma^2 g(\tau) \quad (32)$$

这样，方程式可(27)写为

$$g(\tau) = -a_1 g(\tau - 1) - \cdots - a_n g(\tau - n) + \frac{1}{\sigma^2} [b_1 R_u(\tau - 1) + \cdots + b_n R_u(\tau - n)] \quad (33)$$



令  $\tau = 1, 2, \dots, p$ , ( $p \geq 2n$ ). 则可得到如下形式的向量矩阵方程

$$\mathbf{G} = \mathbf{Q}\theta \quad (34)$$

其中  $\mathbf{G} = [g(1), g(1), \dots, g(p)]^T$ ,  $\theta = [a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n]^T$ .

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ -g(1) & & 0 & & & \mathbf{I}_n \\ \vdots & & & & & \\ -g(n-1) & -g(n-2) & \dots & -g(1) & & 0 \\ -g(n) & -g(n-1) & & -g(2) & & -g(1) \\ \vdots & & & & & \\ -g(p-1) & -g(p-2) & \dots & -g(p-n+1) & -g(p-n) & \mathbf{0}_{(p-n) \times n} \end{bmatrix}$$

根据最小二乘参数估计法，可得到系统参数模型的参数估计量为

$$\theta = (\mathbf{Q}^T \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q}^T \mathbf{G} \quad (35)$$

## 5.7 辅助变量法

## 5.8 相关最小二乘法

## 5.9 多阶段最小二乘法

[Home Page](#)

Title Page



Page 18 of 34

[Go Back](#)

*Full Screen*

Close

Quit

## 2. 伪随机二位式输入信号

设伪随机二位式输入信号为M序列信号，根据M序列的自相关特性

$$R_u(\tau) = \begin{cases} a^2 & \tau = 0(\text{mod } N_p) \\ -\frac{a^2}{N_p} & \tau \neq 0(\text{mod } N_p) \end{cases} \quad (36)$$

其中 $a$ 是M序列的幅度， $N_p$ 是M序列的周期。

令 $\tau = 1, 2, \dots, p$ , ( $p \geq 2n$ ,  $N_p \gg p$ )。则可得到如下形式的向量矩阵方程

$$\begin{bmatrix} R_{uy}(1) \\ R_{uy}(2) \\ \vdots \\ R_{uy}(n) \\ \vdots \\ R_{uy}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_{uy}(0) & -R_{uy}(-1) & \cdots & -R_{uy}(1-n) & a^2 & -\frac{a^2}{N_p} & \cdots & -\frac{a^2}{N_p} \\ -R_{uy}(1) & -R_{uy}(0) & & -R_{uy}(2-n) & -\frac{a^2}{N_p} & a^2 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -R_{uy}(n-1) & -R_{uy}(n-2) & & -R_{uy}(0) & -\frac{a^2}{N_p} & -\frac{a^2}{N_p} & \cdots & a^2 \\ \vdots & & & & \vdots & & & \\ -R_{uy}(p-1) & -R_{uy}(p-2) & \cdots & -R_{uy}(p-n) & -\frac{a^2}{N_p} & -\frac{a^2}{N_p} & \cdots & -\frac{a^2}{N_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (37)$$



5.7 辅助变量法

5.8 相关最小二乘法

5.9 多阶段最小二乘法

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 19 of 34

Go Back

Full Screen

Close

Quit



5.7 辅助变量法

5.8 相关最小二乘法

5.9 多阶段最小二乘法

或写成

$$\mathbf{R}_{uy} = \mathbf{S}\theta \quad (38)$$

根据最小二乘法，可得模型的参数估计量为

$$\theta = (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{R}_{uy} \quad (39)$$

上述相关-最小二乘法是较为实用的算法。同样，也可以导出相应的递推算法。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 20 of 34

Go Back

Full Screen

Close

Quit



5.7 辅助变量法

5.8 相关最小二乘法

5.9 多阶段最小二乘法

### 3. 递推算法(RCOR-LS)

相关函数的估计值式(24)可以按递推形式计算

$$\begin{cases} \hat{R}_{u,k}(\tau) = \hat{R}_{u,k-1}(\tau) + \frac{1}{k}[u_{k-\tau}u_k - \hat{R}_{u,k-1}(\tau)] \\ \hat{R}_{uy,k}(\tau) = \hat{R}_{uy,k-1}(\tau) + \frac{1}{k}[u_{k-\tau}y_k - \hat{R}_{uy,k-1}(\tau)] \end{cases} \quad (40)$$

利用式(40)将式(28)写成

$$\hat{R}_{uy,k}(\tau) = \hat{\varphi}_k^T(\tau)\theta + e_k(\tau) \quad (41)$$

其中

$$\hat{\varphi}_k(\tau) = [-\hat{R}_{uy,k}(\tau-1) \cdots -\hat{R}_{uy,k}(\tau-n) \quad \hat{R}_{u,k}(\tau) \cdots R_{u,k}(\tau-n)]^T \quad (42)$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 21 of 34

Go Back

Full Screen

Close

Quit



5.7 辅助变量法

5.8 相关最小二乘法

5.9 多阶段最小二乘法

根据最小二乘递推算法，可以得到相关最小二乘法的递推算法(简称RCOR-LS)如下

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k + G_{k+1}[\hat{R}_{uy,k}(\tau) - \hat{\varphi}_{k+1}^T(\tau)\hat{\theta}_k] \quad (43)$$

$$G_{k+1} = \frac{P_k \hat{\varphi}_{k+1}(\tau)}{1 + \hat{\varphi}_{k+1}^T(\tau) P_k \hat{\varphi}_{k+1}(\tau)} \quad (44)$$

$$P_{k+1} = [I - G_{k+1} \hat{\varphi}_{k+1}^T(\tau)] P_k \quad (45)$$

式中所用的数据都是相关函数，需在计算 $k$ 时刻的参数估计值 $\hat{\theta}_k$ 之前，先按式(40)计算 $k$ 时刻的相关函数，才可由式(42)构造向量 $\hat{\varphi}_k(\tau)$ 。下面讨论另外一种递推算法形式，它可直接利用输入输出数据递推计算参数估计值，而不需要先计算相关函数。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 22 of 34

Go Back

Full Screen

Close

Quit





当取 $\tau = 1, 2, \dots, 2n$ 时, 模型式(27)构成一个线性方程组

$$E \left\{ \begin{bmatrix} u_{k-1} \\ \vdots \\ u_{k-n} \\ \vdots \\ u_{k-2n} \end{bmatrix} y_k \right\} = E \left\{ \begin{bmatrix} u_{k-1} \\ \vdots \\ u_{k-n} \\ \vdots \\ u_{k-2n} \end{bmatrix} [-y_{k-1}, \dots, -y_{k-n}, u_{k-1}, \dots, u_{k-n}] \right\} \theta \quad (46)$$

令

$$\begin{cases} \varphi_k^* = [u_{k-1}, \dots, u_{k-n}, \dots, u_{k-2n}]^T \\ \varphi_k = [-y_{k-1}, \dots, -y_{k-n}, u_{k-1}, \dots, u_{k-n}]^T \end{cases} \quad (47)$$

则式(46)可写成

$$E\{\varphi_k^* y_k\} = E\{\varphi_k^* \varphi_k^T\} \theta \quad (48)$$

5.7 辅助变量法

5.8 相关最小二乘法

5.9 多阶段最小二乘法

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 23 of 34

Go Back

Full Screen

Close

Quit



5.7 辅助变量法

5.8 相关最小二乘法

5.9 多阶段最小二乘法

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 24 of 34

Go Back

Full Screen

Close

Quit

由于数据是平稳序列，故上式可近似为

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi_k^* y_k = \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi_k^* \varphi_k^T \right] \theta + e_N \quad (49)$$

或

$$\Phi_N^{*T} Y_N = \Phi_N^{*T} \Phi_N \theta + e_N \quad (50)$$

其中  $e_N$  是式(48)近似成式(49)所造成的误差，且

$$Y_N = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$$
$$\Phi_N = \begin{bmatrix} \varphi_1^T \\ \varphi_2^T \\ \dots \\ \varphi_N^T \end{bmatrix}, \quad \Phi_N^* = \begin{bmatrix} \varphi_1^{*T} \\ \varphi_2^{*T} \\ \dots \\ \varphi_N^{*T} \end{bmatrix}$$



5.7 辅助变量法

5.8 相关最小二乘法

5.9 多阶段最小二乘法

模型式(42)的最小二乘解为

$$\hat{\theta}_{COR-LS} = (\Phi_N^{*T} \Phi_N)^{-1} \Phi_N^{*T} Y_N \quad (51)$$

对应的递推算法为

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k + G_{k+1} [y_k - \varphi_{k+1}^T \hat{\theta}_k] \quad (52)$$

$$G_{k+1} = \frac{P_k \varphi_{k+1}^*}{1 + \varphi_{k+1}^T P_k \varphi_{k+1}^*} \quad (53)$$

$$P_{k+1} = [I - G_{k+1} \varphi_{k+1}^T] P_k \quad (54)$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 25 of 34

Go Back

Full Screen

Close

Quit



5.7 辅助变量法

5.8 相关最小二乘法

5.9 多阶段最小二乘法

## 5.9 多阶段最小二乘法

下面介绍另一种解决相关残差问题的最小二乘法，多阶段最小二乘法。这种方法把复杂的辨识问题分成3个阶段来处理，而且每个阶段只用到简单的最小二乘法，省去了广义最小二乘法的迭代过程，简化了计算，并且可以得到参数的一致性无偏估计，计算精度比辅助变量法高。但是，这种方法也存在着与广义最小二乘法相类似的收敛问题。常用的多阶段最小二乘法有3种算法。

### 1. 多阶段最小二乘法I

这一算法分为3个阶段，分别是确定原系统脉冲响应序列、估计系统参数和估计噪声模型参数。

(1) 确定原系统脉冲响应序列  
设系统的差分方程为

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + \xi(k) \quad (55)$$

式中

$$\begin{cases} A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n} \\ B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n} \end{cases}$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 26 of 34

Go Back

Full Screen

Close

Quit



$\xi(k)$ 为有色噪声，可表示为

$$\xi(k) = \frac{1}{C(z^{-1})}\varepsilon(k) \quad (56)$$

$\varepsilon(k)$ 为白噪声序列。

$\xi(k)$ 是由系统输入量的测量噪声、输出量的测量噪声和系统内部噪声所引起的。如果把 $\xi(k)$ 归结为由输出量测量误差 $\nu(k)$ 所引起的，则可求出 $\xi(k)$ 和 $\nu(k)$ 之间的关系式。

$$\xi(k) = A(z^{-1})\nu(k) \quad (57)$$

则式(55)为

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + A(z^{-1})\nu(k) \quad (58)$$

或

$$y(k) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(k) + \nu(k) \quad (59)$$

5.7 辅助变量法

5.8 相关最小二乘法

5.9 多阶段最小二乘法

Home Page

Title Page



Page 27 of 34

Go Back

Full Screen

Close

Quit



5.7 辅助变量法

5.8 相关最小二乘法

5.9 多阶段最小二乘法

设 $g(k)$ 为 $\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$ 的脉冲响应序列，且令

$$x(k) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(k) \quad (60)$$

假定系统是稳定的，可用有限序列来逼近脉冲响应序列 $g(k)$ 。

设有限序列的 $k = 0, 1, \dots, p$ ，而 $p$ 应足够大， $p > 2n + 1$ 。系统输入输出的关系可由离散形式的卷积公式得到

$$x(k) = \sum_{i=0}^p g(i)u(k-i) \quad (61)$$

$$y(k) = \sum_{i=0}^p g(i)u(k-i) + \nu(k) \quad (62)$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 28 of 34

Go Back

Full Screen

Close

Quit



设 $\nu(k)$ 为零均值随机噪声，白色或有色均可，且 $\nu(k)$ 与 $u(k)$ 不相关。给定数据长度为 $N + p$ 的输入输出数据点集，则可写出向量方程

$$Y = \mathbf{U}G + \nu \quad (63)$$

式中

$$\begin{cases} Y = [y(p) \ y(p+1) \ \cdots \ y(p+N)]^T \\ \nu = [\nu(p) \ \nu(p+1) \ \cdots \ \nu(p+N)]^T \\ G = [g(0) \ g(1) \ \cdots \ g(p)]^T \\ \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u(p) & u(p-1) & \cdots & u(0) \\ u(p+1) & u(p) & & u(1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u(p+N) & u(p+N-1) & \cdots & u(N) \end{bmatrix} \end{cases}$$

应用最小二乘法，得到的最小二乘估计为

$$\hat{G} = (\mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^T Y \quad (64)$$

因为 $u(k)$ 与 $\nu(k)$ 不相关， $\mathbf{U}$ 与 $\nu$ 也是不相关的。由于 $\nu$ 的均值为零，当 $N \rightarrow \infty$ 时， $\hat{G}$ 以概率1趋近于 $G$ ，即 $\hat{G}$ 为一致性估计。一般情况下， $\nu(k)$ 是自相关的，所以 $\hat{G}$ 不是极小方差的。

5.7 辅助变量法

5.8 相关最小二乘法

5.9 多阶段最小二乘法

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 29 of 34

Go Back

Full Screen

Close

Quit



## (2) 估计系统参数

用 $u(k)$ 和 $\hat{G}$ 来构成系统真实输出 $x(k)$ 的估值 $\hat{x}(k)$ ，即

$$\hat{x}(k) = \sum_{i=0}^p \hat{g}(i)u(k-i) \quad (65)$$

然后，利用模型

$$A(z^{-1})x(k) = B(z^{-1})u(k) \quad (66)$$

来估计 $A(z^{-1})$ 和 $B(z^{-1})$ 中的各未知参数。

把 $\hat{x}(k)$ 代入式(66)得

$$A(z^{-1})\hat{x}(k) = B(z^{-1})u(k) + \eta(k) \quad (67)$$

式中 $\eta(k)$ 是用 $\hat{x}(k)$ 代替式(66)中的 $x(k)$ 后所引起的实效误差。给出数据长度为 $N+n$ 的输入输出数据点集，可得向量方程

$$\hat{X} = \hat{\Phi}\theta + \eta \quad (68)$$

5.7 辅助变量法

5.8 相关最小二乘法

5.9 多阶段最小二乘法

Home Page

Title Page

◀

▶

◀

▶

Page 30 of 34

Go Back

Full Screen

Close

Quit





5.7 辅助变量法

5.8 相关最小二乘法

5.9 多阶段最小二乘法

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 31 of 34

Go Back

Full Screen

Close

Quit

式中

$$\begin{cases} X = [\hat{x}(n+1) \ \hat{x}(n+2) \ \cdots \ \hat{x}(n+N)]^T \\ \eta = [\eta(n+1) \ \eta(n+2) \ \cdots \ \eta(n+N)]^T \\ \theta = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n \ b_0 \ b_1 \ \cdots \ b_n]^T \\ \Phi = \begin{bmatrix} -\hat{x}(n) & \cdots & -\hat{x}(1) & u(n+1) & \cdots & u(1) \\ -\hat{x}(n+1) & \cdots & -\hat{x}(2) & u(n+2) & \cdots & u(2) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\hat{x}(n+N-1) & \cdots & -\hat{x}(N) & u(n+N) & \cdots & u(N) \end{bmatrix} \end{cases}$$

$\theta$ 的最小二乘估计值为

$$\hat{\theta} = (\hat{\Phi}^T \hat{\Phi})^{-1} \hat{\Phi}^T \hat{X} \quad (69)$$

当  $N \rightarrow \infty$  时,  $\hat{G}$ ,  $\hat{X}$  和  $\eta$  分别以概率1趋近于  $G$ ,  $X$  和  $\mathbf{0}$ , 因此  $\hat{\theta}$  以概率1趋近于  $\theta$ ,  $\hat{\theta}$  是一致无偏估计。



5.7 辅助变量法

5.8 相关最小二乘法

5.9 多阶段最小二乘法

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 32 of 34

Go Back

Full Screen

Close

Quit

### (3) 估计噪声模型参数

设噪声模型为

$$C(z^{-1})\xi(k) = \varepsilon(k) \quad (70)$$

利用已取得的估值 $\hat{\theta}$ 计算残差 $\hat{\xi}(k)$

$$\hat{\xi}(k) = y(k) + \sum_{i=1}^n \hat{a}_i y(k-i) - \sum_{i=0}^n \hat{b}_i u(k-i) \quad (71)$$

以 $\hat{\xi}(k)$ 代替式(70)中的 $\xi(k)$ , 得

$$C(z^{-1})\hat{\xi}(k) = \varepsilon(k) + \zeta(k) \quad (72)$$

式中 $\zeta(k)$ 是由于在模型中用 $\hat{\xi}(k)$ 代替 $\xi(k)$ 所产生的实效误差。



由式(72)可得噪声模型参数 $C$ 的最小二乘估计为

$$\hat{C} = (\mathbf{V}^T \mathbf{V})^{-1} \mathbf{V}^T \hat{E} \quad (73)$$

式中

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{E} = [\hat{\xi}(m+1) \ \hat{\xi}(m+2) \ \cdots \ \hat{\xi}(m+N)]^T \\ C = [\hat{c}_1 \ \hat{c}_2 \ \cdots \ \hat{c}_n]^T \\ \mathbf{V} = \begin{bmatrix} -\hat{\xi}(m) & -\hat{\xi}(m-1) & \cdots & -\hat{\xi}(1) \\ -\hat{\xi}(m+1) & -\hat{\xi}(m) & \cdots & -\hat{\xi}(2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\hat{\xi}(m+N-1) & -\hat{\xi}(m+N-2) & \cdots & -\hat{\xi}(N) \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

当 $N \rightarrow \infty$ 时,  $\hat{\theta}$ ,  $\hat{\xi}$ 和 $\hat{\zeta}$ 分别以概率1趋近于 $\theta$ ,  $\xi$ 和 $\mathbf{0}$ , 因此 $\hat{C}$ 以概率1趋近于 $C$ ,  $\hat{C}$ 是一致无偏估计。

5.7 辅助变量法

5.8 相关最小二乘法

5.9 多阶段最小二乘法

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 33 of 34

Go Back

Full Screen

Close

Quit



5.7 辅助变量法

5.8 相关最小二乘法

5.9 多阶段最小二乘法

## 2. 多阶段最小二乘法II

这一算法的第1阶段“确定原系统脉冲响应序列”和第3阶段“估计噪声模型参数”都与算法I相同，只有第2阶段“估计系统参数”与算法I不同。

估计系统参数采用的是相关-最小二乘算法。

## 3. 多阶段最小二乘法III

这种算法的3个阶段都与前面2种算法不同，它不是计算系统模型的脉冲响应序列，而是采用一个扩展的差分方程，在拟合系统的输入输出数据时，把残差变成不相关，应用最小二乘法辨识这一扩展系统，然后在第2和第3阶段再估计原系统参数和噪声模型参数。

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 34 of 34

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)