



## 第5章 辨识的最小二乘法

### 5.1 最小二乘估计

### 5.2 最小二乘估计的统计性质

作者：李鹏波、胡德文

单位：国防科技大学机电工程与自动化学院

Email: [gaoxia73@163.com](mailto:gaoxia73@163.com)

中国水利水电出版社版权所有



5.1 最小二乘估计

5.2 最小二乘估计的统计性质

2. 有效性

3. 一致性

4. 渐近正态性

Home Page

Title Page



Page 1 of 20

Go Back

Full Screen

Close

Quit



最小二乘法是一种经典的有效的数据处理方法。它是1795年高斯(K.F.Guass)在预测行星和慧星运动的轨道时，提出并实际使用的。

在系统辨识和参数估计领域中，最小二乘法是一种最基本的估计方法。它可用于动态系统，也可用于静态系统；可用于线性系统，也可用于非线性系统；可用于离线估计，也可用于在线估计。在随机的环境下利用最小二乘法时，并不要求知道观测数据的概率统计信息，而用这种方法所获得的估计结果，却有相当好的统计性质。

在系统辨识和参数估计领域中，应用最广泛的估计方法是最小二乘法和极大似然法。本章主要讨论最小二乘法，以及以最小二乘法为基础的辅助变量法、广义最小二乘法、增广最小二乘法、相关-最小二乘法和多阶段最小二乘法等估计方法，分析它们的统计性质和应用特点。

- 5.1 最小二乘估计
- 5.2 最小二乘估计的统...
- 2. 有效性
- 3. 一致性
- 4. 渐近正态性

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 2 of 20](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



## 第5章 辨识的最小二乘法

### 5.1 最小二乘估计

### 5.2 最小二乘估计的统计性质

#### 1. 无偏性

#### 2. 有效性

#### 3. 一致性

#### 4. 渐近正态性

5.1 最小二乘估计

5.2 最小二乘估计的统计性质

2. 有效性

3. 一致性

4. 渐近正态性

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 3 of 20

Go Back

Full Screen

Close

Quit

## 5.1 最小二乘估计

设时不变SISO动态系统的数学模型为

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + e(k) \quad (1)$$

其中

$$\begin{cases} A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n} \\ B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n} \end{cases}$$

模型改写为

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - \dots - a_n y(k-n) + b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_n u(k-n) + e(k) \quad (2)$$

已知系统的输入和输出序列 $\{u(k)\}, \{y(k)\}$ , 求参数 $a_i, b_i, i = 0 \sim n$ 的估计值。



5.1 最小二乘估计

5.2 最小二乘估计的统...

2. 有效性

3. 一致性

4. 渐近正态性

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 4 of 20

Go Back

Full Screen

Close

Quit

## 5.1 最小二乘估计

设时不变SISO动态系统的数学模型为

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) + e(k) \quad (1)$$

其中

$$\begin{cases} A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n} \\ B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n} \end{cases}$$

模型改写为

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - \dots - a_n y(k-n) + b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_n u(k-n) + e(k) \quad (2)$$

已知系统的输入和输出序列 $\{u(k)\}, \{y(k)\}$ , 求参数 $a_i, b_i, i = 0 \sim n$ 的估计值。

将模型式(1)写成最小二乘格式

$$y(k) = \varphi^T(k)\theta + e(k) \quad (3)$$

其中

$$\begin{cases} \varphi(k) = [-y(k-1) \ \dots \ -y(k-n) \ u(k-1) \ \dots \ u(k-n)]^T \\ \theta = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n \ b_0 \ b_1 \ \dots \ b_n]^T \end{cases}$$



5.1 最小二乘估计

5.2 最小二乘估计的统...

2. 有效性

3. 一致性

4. 渐近正态性

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 4 of 20

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 5.1 最小二乘估计
- 5.2 最小二乘估计的统...
- 2. 有效性
- 3. 一致性
- 4. 渐近正态性

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 5 of 20

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

令  $k = n + 1, \dots, n + N$ ，共  $N$  次观测。记

$$Y = \begin{bmatrix} y(n+1) & y(n+2) & \cdots & y(n+N) \end{bmatrix}^T$$

$$e = \begin{bmatrix} e(n+1) & e(n+2) & \cdots & e(n+N) \end{bmatrix}^T$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} -y(n) & \cdots & -y(1) & u(n+1) & \cdots & u(1) \\ -y(n+1) & \cdots & -y(2) & u(n+2) & \cdots & u(2) \\ \vdots & & & & & \vdots \\ -y(n+N-1) & \cdots & -y(N) & u(n+N) & \cdots & u(N) \end{bmatrix}$$

可得向量形式的线性方程组

$$Y = \Phi\theta + e \quad (4)$$

或记为

$$Y_N = \Phi_N\theta + e_N \quad (5)$$



对于模型式(3)的辨识问题，其中 $y(k)$ 和 $\varphi(k)$ 都是可观测的数据， $\theta$ 是待估计的参数。引入最小二乘准则

$$J = \sum_{k=n}^N \hat{e}^2(k) \quad (6)$$

其中

$$\hat{e}(k) = y(k) + \hat{a}_1 y(k-1) + \cdots + \hat{a}_n y(k-n) - \hat{b}_0 u(k) - \hat{b}_1 u(k-1) - \cdots - \hat{b}_n u(k-n) \quad (7)$$

$\hat{e}(k)$ 称为残差(residual)或方程误差，也是一个随机过程。由式(7)得

$$\begin{aligned} \hat{e}(k) &= y(k) - \varphi^T(k) \hat{\theta} = \varphi^T(k) \theta + e(k) - \varphi^T(k) \hat{\theta} \\ &= \varphi^T(k) (\theta - \hat{\theta}) + e(k) \end{aligned} \quad (8)$$

可见，残差 $\hat{e}(k)$ 包含两个误差因素，一是参数估计误差带来的拟合误差，一是随机噪声带来的误差。

5.1 最小二乘估计

5.2 最小二乘估计的统...

2. 有效性

3. 一致性

4. 渐近正态性

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 6 of 20

Go Back

Full Screen

Close

Quit



5.1 最小二乘估计

5.2 最小二乘估计的统...

2. 有效性

3. 一致性

4. 渐近正态性

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 7 of 20

Go Back

Full Screen

Close

Quit

式(6)的指标函数 $J$ 即残差的平方和。最小二乘估计是在残差二乘方准则函数极小意义下的最优估计，即按照准则函数

$$J = \hat{e}^T \hat{e} = (Y - \Phi \hat{\theta})^T (Y - \Phi \hat{\theta}) = \min \quad (9)$$

来确定估计值 $\hat{\theta}$ 。求 $J$ 对 $\hat{\theta}$ 的偏导数并令其等于0，可得

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\theta}} = \frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} (Y - \Phi \hat{\theta})^T (Y - \Phi \hat{\theta}) = -\Phi^T (Y - \Phi \hat{\theta}) - \Phi^T (Y - \hat{\theta}) = 0 \quad (10)$$

即

$$\Phi^T \Phi \hat{\theta} = \Phi^T Y \quad (11)$$

上式称为正则方程。当 $\Phi^T \Phi$ 为非奇异，即 $\Phi$ 列满秩时，有

$$\hat{\theta}_{LS} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y \quad (12)$$

这时的 $\hat{\theta}_{LS}$ 简称最小二乘估计值，对应的方法叫作最小二乘法。





在推导最小二乘法的结果时，并没有考虑噪声 $e(k)$ 的统计特性。但在评价最小二乘估计的性质时，则必须假设噪声 $e(k)$ 是不相关的，而且是同分布的随机变量。也即假设 $\{e(k)\}$ 是白噪声序列，即

$$E\{e_N\} = 0, \quad \text{Cov}\{e_N\} = \sigma_e^2 \cdot I_{N \times N}$$

噪声向量的协方差阵为

$$\text{Cov}\{e_N\} = E\{e_N \cdot e_N^T\} = \begin{bmatrix} E\{e^2(1)\} & E\{e(1)e(2)\} & \cdots & E\{e(1)e(N)\} \\ E\{e(1)e(2)\} & E\{e^2(2)\} & \cdots & E\{e(2)e(N)\} \\ & & \ddots & \\ E\{e(1)e(N)\} & E\{e(2)e(N)\} & \cdots & E\{e^2(N)\} \end{bmatrix}$$

如果准则函数取为加权函数，即

$$\begin{aligned} J &= \sum_{k=n}^N w(k) [y(k) - \varphi^T(k)\theta]^2 \\ &= \hat{e}^T W \hat{e} \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $w(k)$ 称为加权因子，对所有的 $k$ ， $w(k)$ 都必须为正数。

5.1 最小二乘估计

5.2 最小二乘估计的统...

2. 有效性

3. 一致性

4. 渐近正态性

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 8 of 20

Go Back

Full Screen

Close

Quit



通过极小化式(13)计算 $\hat{\theta}_{WLS}$ 的方法称为**加权最小二乘法**，对应的 $\hat{\theta}_{WLS}$ 称为加权最小二乘估计值。加权最小二乘估计的解为

$$\hat{\theta}_{WLS} = (\Phi^T W \Phi)^{-1} \Phi^T W Y \quad (14)$$

$W$ 是一对称正定阵。若取 $W = I$ ，则 $\hat{\theta}_{WLS} = \hat{\theta}_{LS}$ 。所以，最小二乘法是加权最小二乘法的一种特例。

当获得一批数据之后，利用式(12)或式(14)可一次求得相应的参数估计值，这样处理问题的方法就称作一次完成算法或批处理算法。它在理论研究方面有许多方便之处，但在计算方面要碰到矩阵求逆的困难。当矩阵的维数增加时，矩阵求逆运算的计算量将急剧增加，这会给计算速度和存储带来负担。可用高斯消元法直接解正则方程式(11)，以便更快地求得参数估计值。但是，更实用的方法还是设法把式(14)化为递推计算的形式，以便于在线辨识，而且大大减少了数据的存储。另外，一次完成算法要求 $\Phi^T W \Phi$ 必须是正则矩阵，即可逆的，其充分必要条件是过程的输入信号必须是 $2n$ 阶持续激励信号。

5.1 最小二乘估计

5.2 最小二乘估计的统...

2. 有效性

3. 一致性

4. 渐近正态性

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 9 of 20

Go Back

Full Screen

Close

Quit



## 5.2 最小二乘估计的统计性质

由于 $\Phi$ 和 $Y$ 均具有随机性，故 $\hat{\theta}_{WLS}$ 或 $\hat{\theta}_{LS}$ 亦是随机向量，为此，需要研究它们的统计性质。一般评价一个估计方法的好坏，也主要从无偏性、有效性、一致性等方面进行，从而帮助确认该方法的实用价值。

### 1. 无偏性

无偏性是用来衡量估计值是否围绕真值波动，是估计值的一个重要统计性质。一个估计量 $\hat{\theta}$ 称为无偏估计，则它的数学期望等于参数的真值。即

$$E[\hat{\theta}] = \theta \quad (15)$$

其中 $\theta$ 表示参数的真实值。

模型式(4)参数 $\theta$ 的最小二乘估计值为

$$\hat{\theta}_{LS} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y \quad (16)$$

5.1 最小二乘估计

5.2 最小二乘估计的统计性质

2. 有效性

3. 一致性

4. 渐近正态性

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 10 of 20

Go Back

Full Screen

Close

Quit



## 5.2 最小二乘估计的统计性质

由于 $\Phi$ 和 $Y$ 均具有随机性，故 $\hat{\theta}_{WLS}$ 或 $\hat{\theta}_{LS}$ 亦是随机向量，为此，需要研究它们的统计性质。一般评价一个估计方法的好坏，也主要从无偏性、有效性、一致性等方面进行，从而帮助确认该方法的实用价值。

### 1. 无偏性

无偏性是用来衡量估计值是否围绕真值波动，是估计值的一个重要统计性质。一个估计量 $\hat{\theta}$ 称为无偏估计，则它的数学期望等于参数的真值。即

$$E[\hat{\theta}] = \theta \quad (15)$$

其中 $\theta$ 表示参数的真实值。

模型式(4)参数 $\theta$ 的最小二乘估计值为

$$\hat{\theta}_{LS} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y \quad (16)$$

其数学期望为

$$\begin{aligned} E[\hat{\theta}_{LS}] &= [(\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T (\Phi \theta + e)] \\ &= \theta + E[(\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T e] \end{aligned} \quad (17)$$

5.1 最小二乘估计

5.2 最小二乘估计的统计性质

2. 有效性

3. 一致性

4. 渐近正态性

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 10 of 20

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 5.1 最小二乘估计
- 5.2 最小二乘估计的统...
- 2. 有效性
- 3. 一致性
- 4. 渐近正态性

**定理5.1** 如果模型式(4)噪声向量 $e$ 的均值为零, 且和 $\Phi$ 是统计独立的, 则加权最小二乘估计值 $\hat{\theta}_{WLS}$ 是无偏估计量, 即 $E\{\hat{\theta}_{WLS}\} = \theta$ 。

证明:

根据式(4)及定理5.1所给的条件, 参数估计量 $\hat{\theta}_{WLS}$ 的数学期望为

$$\begin{aligned} E[\hat{\theta}_{WLS}] &= [(\Phi^T W \Phi)^{-1} \Phi^T W (\Phi \theta + e)] \\ &= \theta + E[(\Phi^T W \Phi)^{-1} \Phi^T W e] \end{aligned} \quad (18)$$

$\Phi$ 与 $e$ 统计独立, 则

$$E[(\Phi^T W \Phi)^{-1} \Phi^T W e] = E[(\Phi^T W \Phi)^{-1} \Phi^T W] \cdot E[e] = 0 \quad (19)$$

$$E[\hat{\theta}_{WLS}] = \theta \quad (20)$$

所以 $\hat{\theta}_{WLS}$ 是无偏估计量。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 11 of 20

Go Back

Full Screen

Close

Quit



定理5.1所给的条件是 $\hat{\theta}_{WLS}$ 为无偏估计量的充分条件，并不是必要条件。  
其必要条件是

$$E[(\Phi^T W \Phi)^{-1} \Phi^T W e] = 0 \quad (21)$$

即 $(\Phi^T W \Phi)^{-1} \Phi^T W$ 与噪声向量 $e$ 正交。

当定理5.1的条件不能满足时，可以获得一种无偏估计量，即选择加权阵 $W$ ，使式(21)的正交条件满足。

一般如果 $\{e(k)\}$ 是零均值白噪声序列，即

$$E\{e(k)\} = 0, \quad E\{e(k)e(j)\} = \begin{cases} \sigma^2 & k = j \\ 0 & k \neq j \end{cases}$$

则 $\hat{\theta}_{WLS}$ 为无偏估计量。

- 5.1 最小二乘估计
- 5.2 最小二乘估计的统...
- 2. 有效性
- 3. 一致性
- 4. 渐近正态性

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 12 of 20

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 5.1 最小二乘估计
- 5.2 最小二乘估计的统...
- 2. 有效性
- 3. 一致性
- 4. 渐近正态性

## 2. 有效性(Efficiency)

对于一种无偏估计，一个算法称为是有效的，就是任何其他一种算法所得到的参数向量估计值的方差都比有效算法的大。

最小二乘估计值 $\hat{\theta}_{LS}$ 的协方差阵为

$$\begin{aligned} Cov\hat{\theta}_{LS} &= E\{(\hat{\theta}_{LS} - \theta)(\hat{\theta}_{LS} - \theta)^T\} \\ &= E\{[(\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T e][e^T(\Phi(\Phi^T\Phi)^{-1})]\} \\ &= (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T E[ee^T]\Phi(\Phi^T\Phi)^{-1} \end{aligned} \quad (22)$$

式中 $E[ee^T] = R$  为噪声向量的方差矩阵。对于加权最小二乘估计值 $\hat{\theta}_{WLS}$ ，协方差阵为

$$Cov\hat{\theta}_{WLS} = (\Phi^T W \Phi)^{-1} \Phi^T W R W^T \Phi (\Phi^T W \Phi)^{-1} \quad (23)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 13 of 20](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



5.1 最小二乘估计

5.2 最小二乘估计的统...

2. 有效性

3. 一致性

4. 渐近正态性

**定理5.2** 当加权阵取为噪声方差阵的逆，即 $W = R^{-1}$ 时，加权最小二乘估计值 $\hat{\theta}_{WLS}$ 是最小误差方差估计。

证明：

若 $W = R^{-1}$ ，估计值 $\hat{\theta}_{WLS}$ 记为 $\hat{\theta}_{MV}$ ，

$$\hat{\theta}_{MV} = (\Phi^T R^{-1} \Phi)^{-1} \Phi^T R^{-1} Y \quad (24)$$

此时的协方差阵记为 $Cov\hat{\theta}_{MV}$ ，则

$$Cov\hat{\theta}_{MV} = Cov\hat{\theta}_{WLS} = (\Phi^T R^{-1} \Phi)^{-1} \quad (25)$$

要证明最小方差估计，即证明 $Cov\hat{\theta}_{WLS} \geq Cov\hat{\theta}_{MV}$ 。

Home Page

Title Page



Page 14 of 20

Go Back

Full Screen

Close

Quit





- 5.1 最小二乘估计
- 5.2 最小二乘估计的统...
- 2. 有效性
- 3. 一致性
- 4. 渐近正态性

定义

$$L_{WLS} = (\Phi^T W \Phi)^{-1} \Phi^T W, \quad L_{MV} = (\Phi^T R^{-1} \Phi)^{-1} \Phi^T R^{-1}$$

则

$$\text{Cov} \hat{\theta}_{WLS} = L_{WLS} R L_{WLS}^T, \quad \text{Cov} \hat{\theta}_{MV} = L_{MV} R L_{MV}^T$$

而

$$\begin{aligned} L_{WLS} R L_{MV}^T &= (\Phi^T W \Phi)^{-1} \Phi^T W \cdot R \cdot R^{-1} \Phi (\Phi^T R^{-1} \Phi)^{-1} \\ &= (\Phi^T R^{-1} \Phi)^{-1} = \text{Cov} \hat{\theta}_{MV} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov} \hat{\theta}_{WLS} - \text{Cov} \hat{\theta}_{MV} &= \text{Cov} \hat{\theta}_{WLS} - \text{Cov} \hat{\theta}_{MV} - \text{Cov} \hat{\theta}_{MV} + \text{Cov} \hat{\theta}_{MV} \\ &= L_{WLS} R L_{WLS}^T - L_{WLS} R L_{MV}^T - L_{MV} R L_{WLS}^T - L_{MV} R L_{MV}^T \\ &= (L_{WLS} - L_{MV}) R (L_{WLS} - L_{MV})^T \geq 0 \end{aligned}$$

这就证明了  $\text{Cov} \hat{\theta}_{MV} = (\Phi^T R^{-1} \Phi)^{-1} = \min$ ，所以当加权阵取为噪声方差阵的逆，即  $W = R^{-1}$  时，估计值  $\hat{\theta}_{MV}$  是最小方差估计。最小方差估计也称为Markov估计。Markov估计是加权最小二乘估计的一种特例。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 15 of 20

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 5.1 最小二乘估计
- 5.2 最小二乘估计的统...
- 2. 有效性
- 3. 一致性
- 4. 渐近正态性

当噪声向量是独立同分布(i.i.d)的，即 $\{e(k)\}$ 是白噪声时， $R = \sigma^2 I$ 。则

$$\hat{\theta}_{WLS} \xrightarrow{W=I} \hat{\theta}_{LS} = \hat{\theta}_{MV} \quad (26)$$

而且， $\hat{\theta}_{LS}$ 是渐近无偏的。所以，在 $\{e(k)\}$ 为白噪声序列时，最小二乘估计 $\hat{\theta}_{LS}$ 为有效估计。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 16 of 20](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 5.1 最小二乘估计
- 5.2 最小二乘估计的统...
- 2. 有效性
- 3. 一致性
- 4. 渐近正态性

### 3. 一致性(Consistency)

如果估计值具有一致性, 说明它将以概率1收敛于真值, 即

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon\} = 1 \quad (27)$$

或记为

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\theta} = \theta, \quad w.p.1 \quad (28)$$

符号“w.p.1”为“with probability 1”(依概率1)的缩写。

**定理5.3** 如果模型式(5)的 $e_N$ 是零均值白噪声序列, 则最小二乘估计值 $\hat{\theta}_{LS}$ 是 $\theta$ 的一致估计。

Home Page

Title Page

◀▶

◀▶

Page 17 of 20

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 5.1 最小二乘估计
- 5.2 最小二乘估计的统...
- 2. 有效性
- 3. 一致性
- 4. 渐近正态性

证明:

$$\begin{aligned}\lim_{N \rightarrow \infty} Cov\{\hat{\theta}_{LS}\} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_n^2 \cdot E\{(\Phi_N^T \Phi_N)^{-1}\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sigma_n^2}{N} \cdot E\{(\frac{1}{N} \Phi_N^T \Phi_N)^{-1}\}\end{aligned}\quad (29)$$

$$\frac{1}{N} \Phi_N^T \Phi_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) \varphi^T(k) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} E\{\varphi(k) \varphi^T(k)\} \quad (30)$$

式中,  $\frac{1}{N} \Phi_N^T \Phi_N$  将依概率1收敛于一个正定阵, 且  $\sigma_N^2$  是有界的, 因而  $\lim_{N \rightarrow \infty} Cov\{\hat{\theta}_{LS}\} = 0$ 。

又因为  $E\{\hat{\theta}_{LS}\} = \theta$ , 故

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\theta}_{LS} = \theta, \quad w.p.1 \quad (31)$$

当噪声  $e_N$  是白噪声时, 最小二乘参数估计值是一致收敛的。需要特别指出的是, 只有当  $e_N$  是白噪声时, 最小二乘估计值才是一致收敛的。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 18 of 20

Go Back

Full Screen

Close

Quit



#### 4. 渐近正态性

**定理5.4** 设 $e_N$ 是零均值白噪声，且设 $e_N$ 服从正态分布，则最小二乘参数估计值 $\hat{\theta}_{LS}$ 服从正态分布，即

$$\hat{\theta}_{LS} \sim N(\theta, \sigma^2 \cdot E\{(\Phi_N^T \Phi_N)^{-1}\}) \quad (32)$$

证明：

根据 $Y_N = \Phi_N \theta + e_N$ ，及 $e_N \sim N(0, \sigma^2 \cdot I_{N \times N})$ ，可得

$$Y_N \sim N(E\{\Phi_N \theta\}, \sigma^2 \cdot I) \quad (33)$$

由

$$\hat{\theta}_{LS} = (\Phi_N^T \Phi_N)^{-1} \Phi_N^T Y \quad (34)$$

可见 $\hat{\theta}_{LS}$ 是 $Y$ 的线性函数，则有

$$\hat{\theta}_{LS} \sim N(E\{\hat{\theta}_{LS}\}, Cov\{\hat{\theta}_{LS}\}) \quad (35)$$

5.1 最小二乘估计

5.2 最小二乘估计的统...

2. 有效性

3. 一致性

4. 渐近正态性

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 19 of 20

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 5.1 最小二乘估计
- 5.2 最小二乘估计的统...
- 2. 有效性
- 3. 一致性
- 4. 渐近正态性

即

$$\hat{\theta}_{LS} \sim N(\theta, \sigma^2 \cdot E\{(\Phi_N^T \Phi_N)^{-1}\}) \quad (36)$$

综上所述，在 $\{e(k)\}$ 为白噪声序列时，最小二乘估计 $\hat{\theta}_{LS}$ 具有无偏性、有效性与渐近正态性。一般情况下，系统广义回归模型中的噪声项 $\{e(k)\}$ 是有色噪声序列，所以最小二乘估计 $\hat{\theta}_{LS}$ 是有偏、非一致估计。但因最小二乘法的算法简单，在模型精度要求不高的场合得到了普遍的应用。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 20 of 20

Go Back

Full Screen

Close

Quit