



第3章 辨识的输入信号

3.1 伪随机序列

3.2 连续型伪随机信号

作者：李鹏波、胡德文

单位：国防科技大学机电工程与自动化学院

Email: gaoxia73@163.com

中国水利水电出版社版权所有

- 3.1 伪随机序列
- 3.1.2 M3序列的产生与...
- 3.1.3 逆重复M序列
- 3.2 连续型伪随机信号
- 3.2.2 连续型伪随机信...

Home Page

Title Page



Page 1 of 26

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 3.1 伪随机序列
- 3.1.2 M3序列的产生与 ...
- 3.1.3 逆重复M序列
- 3.2 连续型伪随机信号
- 3.2.2 连续型伪随机信 ...

合理选择辨识的输入信号是能否获得好的辨识结果的关键之一。为了使系统是可辨识的，输入信号必须满足一定的条件，其最低要求是在辨识时间内系统的动态必须被输入信号持续激励。也就是说，在试验期间输入信号必须充分激励系统的所有模态。更进一步，输入信号的选择应能使给定问题的辨识模型精度最高，这就引出了最优输入信号的设计问题。

Goodwin and Payne(1977)指出：如果模型结构是正确的，且参数估计值 $\hat{\theta}$ 是无偏最小方差估计，则参数估计值 $\hat{\theta}$ 的精度通过Fisher 信息矩阵 M_{θ} 依赖于输入信号 $u(k)$ 。最优输入信号是具有脉冲式自相关函数的信号，即

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u(k-i)u(k-j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

当 N 很大时，白噪声或 M 序列可近似满足这一要求；当 N 不大时，并非对所有的 N 都能找到这种输入信号。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 2 of 26](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



3.1 伪随机序列
3.1.2 M3序列的产生与 ...
3.1.3 逆重复M序列
3.2 连续型伪随机信号
3.2.2 连续型伪随机信 ...

在具体工程应用中，选择输入信号时还应该考虑以下因素：

(1)输入信号的功率或幅度不宜过大，以免使系统工作在非线性区，但也不应过小，以致信噪比太小，直接影响辨识精度；

(2)输入信号对系统的“近扰动”要小，即应使正负向扰动机会几乎均等；

(3)工程上要便于实现，成本低。

辨识中常用的输入信号有白噪声或伪随机信号。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 3 of 26

Go Back

Full Screen

Close

Quit



第3章 辨识的输入信号

3.1 伪随机序列

1. M序列的产生与性质

2. M3序列的产生与性质

3. 逆重复M序列

3.2 连续型伪随机信号

3.1 伪随机序列
3.1.2 M3序列的产生与...
3.1.3 逆重复M序列
3.2 连续型伪随机信号
3.2.2 连续型伪随机信...

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 4 of 26

Go Back

Full Screen

Close

Quit



3.1 伪随机序列

伪随机序列(Pseudorandom Sequences)是一种很好的辨识输入信号，它具有近似白噪声的性质，不仅可以保证有较好的辨识效果，而且工程上又易于实现。

伪随机序列理论已广泛应用于通信、雷达、导航、密码学、声学、光学测量、数字跟踪系统、网络系统故障诊断等许多技术领域，在系统辨识领域，也普遍用到了伪随机序列。下面介绍与辨识有关的伪随机序列的产生及性质。

- 3.1 伪随机序列
- 3.1.2 M 3序列的产生与...
- 3.1.3 逆重复 M 序列
- 3.2 连续型伪随机信号
- 3.2.2 连续型伪随机信...

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 5 of 26

Go Back

Full Screen

Close

Quit



3.1 伪随机序列

伪随机序列(Pseudorandom Sequences)是一种很好的辨识输入信号，它具有近似白噪声的性质，不仅可以保证有较好的辨识效果，而且工程上又易于实现。

伪随机序列理论已广泛应用于通信、雷达、导航、密码学、声学、光学测量、数字跟踪系统、网络系统故障诊断等许多技术领域，在系统辨识领域，也普遍用到了伪随机序列。下面介绍与辨识有关的伪随机序列的产生及性质。

3.1.1 M序列的产生与性质

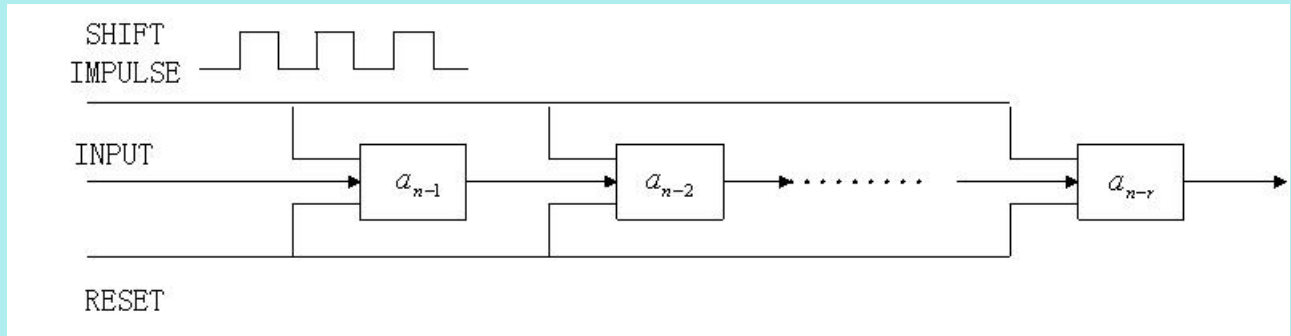
M序列即二位式最大长度线性反馈移位寄存器序列，是伪随机二位式序列(P.R.B.S)最简单的一种，它由带有线性反馈逻辑电路的移位寄存器产生。

- 3.1 伪随机序列
- 3.1.2 M3序列的产生与...
- 3.1.3 逆重复M序列
- 3.2 连续型伪随机信号
- 3.2.2 连续型伪随机信...

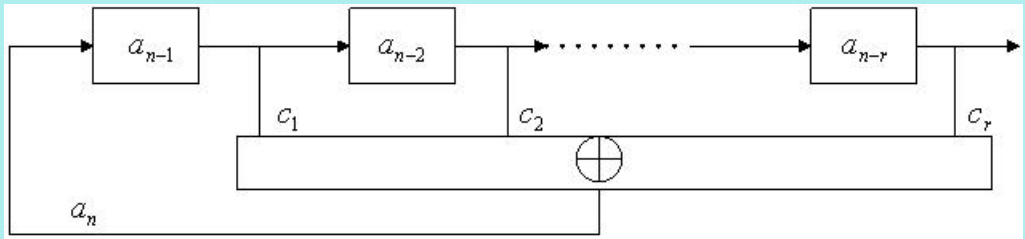
[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 5 of 26](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 3.1 伪随机序列
- 3.1.2 M3序列的产生与...
- 3.1.3 逆重复M序列
- 3.2 连续型伪随机信号
- 3.2.2 连续型伪随机信...



移位寄存器由 r 个具有移位功能的触发器串联而成，如图所示， $(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-r})$ 构成一个状态。图中每个方框表示一个触发器，方框内的数码表示该触发器的当前状态(输出端)为0或1。初始状态可任意设定。在移位脉冲下，触发器的新的状态将等于原来的输入，移位寄存器就将数码 $(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-r})$ 向右平移一位。将各级状态中的一部分状态进行模2加，反馈到第一级的输入端 a_n ，如图所示。





那么，在移位时钟脉冲的作用下，就得到一个无限长的周期性二位式序列。图中反馈系数 $C_i = 0$ 或 1 ，分别表示第 i 阶参与或不参与逻辑组合， $\{a_n\}$ 的通式为

$$a_n = c_1 a_{n-1} \oplus c_2 a_{n-2} \oplus \dots \oplus c_r a_{n-r} = \sum_{i=1}^r \oplus c_i a_{n-i} \quad (1)$$

其中 \oplus 表示模2加， $\sum \oplus$ 表示模2累加。

- 3.1 伪随机序列
- 3.1.2 M3序列的产生与...
- 3.1.3 逆重复M序列
- 3.2 连续型伪随机信号
- 3.2.2 连续型伪随机信...

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 7 of 26](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



那么，在移位时钟脉冲的作用下，就得到一个无限长的周期性二位式序列。图中反馈系数 $C_i = 0$ 或 1 ，分别表示第 i 阶参与或不参与逻辑组合， $\{a_n\}$ 的通式为

$$a_n = c_1 a_{n-1} \oplus c_2 a_{n-2} \oplus \dots \oplus c_r a_{n-r} = \sum_{i=1}^r \oplus c_i a_{n-i} \quad (1)$$

其中 \oplus 表示模2加， $\sum \oplus$ 表示模2累加。

例3.1 设有一个四级移位寄存器， $c_1 = c_2 = 0$ ， $c_3 = c_4 = 1$ 。即反馈逻辑为 $a_n = a_{n-3} \oplus a_{n-4}$ 。试写出 $\{a_n\}$ 。

- 3.1 伪随机序列
- 3.1.2 M3序列的产生与...
- 3.1.3 逆重复M序列
- 3.2 连续型伪随机信号
- 3.2.2 连续型伪随机信...

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 7 of 26](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



3.1 伪随机序列
3.1.2 M3序列的产生与...
3.1.3 逆重复M序列
3.2 连续型伪随机信号
3.2.2 连续型伪随机信...

那么，在移位时钟脉冲的作用下，就得到一个无限长的周期性二位式序列。图中反馈系数 $C_i = 0$ 或 1 ，分别表示第 i 阶参与或不参与逻辑组合， $\{a_n\}$ 的通式为

$$a_n = c_1 a_{n-1} \oplus c_2 a_{n-2} \oplus \dots \oplus c_r a_{n-r} = \sum_{i=1}^r \oplus c_i a_{n-i} \quad (1)$$

其中 \oplus 表示模2加， $\sum \oplus$ 表示模2累加。

例3.1 设有一个四级移位寄存器， $c_1 = c_2 = 0$ ， $c_3 = c_4 = 1$ 。即反馈逻辑为 $a_n = a_{n-3} \oplus a_{n-4}$ 。试写出 $\{a_n\}$ 。

若初始状态为 $(a_{n-4}, a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}) = (0, 0, 0, 0)$ ，则输出为全零序列。

若初始状态为 $(1, 1, 1, 1)$ ，则输出序列为

1 1 1 1 0 0 0 1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 1 1 ...

周期为15。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 7 of 26

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 3.1 伪随机序列
- 3.1.2 M3序列的产生与 ...
- 3.1.3 逆重复M序列
- 3.2 连续型伪随机信号
- 3.2.2 连续型伪随机信 ...

由四级移位寄存器产生的序列周期不可能超过 $2^4 = 16$ ，而全零初态又将导致全零序列，这种情况不应出现。故四级移位寄存器所能产生的序列的最大周期只能是15。

又若初始状态为(0 0 0 1)，则输出为0 0 0 1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 1 1 ... 只不过是前一种序列的平移而已。

对于 r 级移位寄存器，只要适当地选择反馈逻辑，就能产生最大长度为 $2^r - 1$ 的二位式周期序列，即M序列。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 8 of 26

Go Back

Full Screen

Close

Quit



定义3.2 模2域上反馈逻辑为式(1)的移位寄存器，其特征多项式定义为

$$F(x) = 1 \oplus \sum_{i=1}^r \oplus c_i x^i \quad c_i = 0, 1 \quad (2)$$

显然，一个移位寄存器的反馈逻辑运算完全确定了它的特征多项式，反之亦然。什么样的特征多项式能产生M序列呢？

- 3.1 伪随机序列
- 3.1.2 M3序列的产生与...
- 3.1.3 逆重复M序列
- 3.2 连续型伪随机信号
- 3.2.2 连续型伪随机信...

Home Page

Title Page



Page 9 of 26

Go Back

Full Screen

Close

Quit



3.1 伪随机序列
3.1.2 M3序列的产生与 ...
3.1.3 逆重复M序列
3.2 连续型伪随机信号
3.2.2 连续型伪随机信 ...

定义3.2 模2域上反馈逻辑为式(1)的移位寄存器，其特征多项式定义为

$$F(x) = 1 \oplus \sum_{i=1}^r \oplus c_i x^i \quad c_i = 0, 1 \quad (2)$$

显然，一个移位寄存器的反馈逻辑运算完全确定了它的特征多项式，反之亦然。什么样的特征多项式能产生M序列呢？

定理3.1 产生M序列的多项式 $F(x)$ 必为不可约多项式。
所谓不可约多项式，即不能将 $F(x)$ 分解为二个以上多项式相乘而又保证这些多项式的系数为有理数。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 9 of 26

Go Back

Full Screen

Close

Quit



3.1 伪随机序列
3.1.2 M3序列的产生与 ...
3.1.3 逆重复M序列
3.2 连续型伪随机信号
3.2.2 连续型伪随机信 ...

定义3.2 模2域上反馈逻辑为式(1)的移位寄存器，其特征多项式定义为

$$F(x) = 1 \oplus \sum_{i=1}^r \oplus c_i x^i \quad c_i = 0, 1 \quad (2)$$

显然，一个移位寄存器的反馈逻辑运算完全确定了它的特征多项式，反之亦然。什么样的特征多项式能产生M序列呢？

定理3.1 产生M序列的多项式 $F(x)$ 必为不可约多项式。

所谓不可约多项式，即不能将 $F(x)$ 分解为二个以上多项式相乘而又保证这些多项式的系数为有理数。

定理3.2 若 $F(x)$ 为 r 次不可约多项式，则产生的序列周期 N_p 必有 $N_p | 2^r - 1$ (即 $2^r - 1$ 被 N_p 整除)。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 9 of 26

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 3.1 伪随机序列
- 3.1.2 M3序列的产生与...
- 3.1.3 逆重复M序列
- 3.2 连续型伪随机信号
- 3.2.2 连续型伪随机信...

推论：若 $F(x)$ 为 r 次不可约多项式，且 $2^r - 1$ 为素数时，则产生的序列为M序列。

已经证明，当 $r = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89$ 等数时， $2^r - 1$ 为素数。当 r 为合数时， $2^r - 1$ 必为合数，但也可以产生M序列。为得到更一般的结论，我们引入本原多项式的概念。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 10 of 26](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 3.1 伪随机序列
- 3.1.2 M3序列的产生与...
- 3.1.3 逆重复M序列
- 3.2 连续型伪随机信号
- 3.2.2 连续型伪随机信...

推论：若 $F(x)$ 为 r 次不可约多项式，且 $2^r - 1$ 为素数时，则产生的序列为M序列。

已经证明，当 $r = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89$ 等数时， $2^r - 1$ 为素数。当 r 为合数时， $2^r - 1$ 必为合数，但也可以产生M序列。为得到更一般的结论，我们引入本原多项式的概念。

定义3.3 r 次不可约多项式 $F(x)$ ，若对每个小于 $2^r - 1$ 的正整数 s ，都有 $F(x) \nmid x^s \oplus 1$ ，则称 $F(x)$ 为 r 次本原多项式。（ \nmid 表示不能整除）

[Home Page](#)[Title Page](#)[«](#) [»](#)[◀](#) [▶](#)[Page 10 of 26](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 3.1 伪随机序列
- 3.1.2 M3序列的产生与...
- 3.1.3 逆重复M序列
- 3.2 连续型伪随机信号
- 3.2.2 连续型伪随机信...

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[«](#) [»](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 10 of 26

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

推论：若 $F(x)$ 为 r 次不可约多项式，且 $2^r - 1$ 为素数时，则产生的序列为M序列。

已经证明，当 $r = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89$ 等数时， $2^r - 1$ 为素数。当 r 为合数时， $2^r - 1$ 必为合数，但也可以产生M序列。为得到更一般的结论，我们引入本原多项式的概念。

定义3.3 r 次不可约多项式 $F(x)$ ，若对每个小于 $2^r - 1$ 的正整数 s ，都有 $F(x) \nmid x^s \oplus 1$ ，则称 $F(x)$ 为 r 次本原多项式。（ \nmid 表示不能整除）

定理3.3 r 级线性移位寄存器产生M序列的充要条件是它的特征多项式 $F(x)$ 为本原多项式。



产生M序列的本原多项式如表3.1所示，表中 $c_i = 1$ 的 i 值即参与反馈的级。对于表3.1给定的联结方式，可用式(??)在计算机上递推产生出各级M序列。

表3.1 产生M序列的本原多项式

r	$i(C_i = 1)$	N_p
3	2,3	7
4	3,4	15
5	3,5	31
6	5,6	63
7	4,7	127
8	2,3,4,8	255
9	5,9	511
10	7,10	1023
11	9,11	2047

- 3.1 伪随机序列
- 3.1.2 M3序列的产生与...
- 3.1.3 逆重复M序列
- 3.2 连续型伪随机信号
- 3.2.2 连续型伪随机信...

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 11 of 26

Go Back

Full Screen

Close

Quit



3.1 伪随机序列
3.1.2 M3序列的产生与...
3.1.3 逆重复M序列
3.2 连续型伪随机信号
3.2.2 连续型伪随机信...

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 12 of 26

Go Back

Full Screen

Close

Quit

下面讨论M序列的性质:

1) 由 r 级线性反馈移位寄存器产生的M序列, 周期为 $N_p = 2^r - 1$.

2) M序列的一个周期 N_p 中, 有 $(N_p + 1)/2$ 个“1”, $(N_p - 1)/2$ 个“0”。即“0”和“1”尽最大可能相等。

3) 如果把序列中连续出现的 i 个“0”或“1”称为一个长度为 i 的游程, 那么一个周期中(全“1”初态), 游程总数为 2^{r-1} 个, 其中“0”游程和“1”游程各占一半, $1 \leq i \leq r - 2$ 时, 长度为 i 的游程数占总游程数的 $1/2^i$, 长度为 $r - 1$ 的“0”游程和长度为 r 的“1”游程各一个。

4) 移位相加特性: M序列 $\{a_n\}$ 与它的移位 τ 后的序列 $\{a_{n-\tau}\}$ 按位模2加后, 仍为同样的m序列(的某个移位)。

例3.2 一个4级M序列

1 1 1 1 0 0 0 1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 1 1 ...

与其延迟7bit的序列

0 0 1 1 0 1 0 1 1 1 1 0 0 0 1 0 0 1 1 ...

按位模2加, 得到新的序列

1 1 0 0 0 1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 1 1 0 0 ...

也是M序列, 不过比原M序列延迟了13bit。可见, 它们是移位等价的。



3.1 伪随机序列
3.1.2 M3序列的产生与 ...
3.1.3 逆重复M序列
3.2 连续型伪随机信号
3.2.2 连续型伪随机信 ...

5) 每隔 s 步采样，仍得到M序列， $(s, N_p) = 1$.

在辨识中，逻辑“0”对应于“ $-a$ ”，逻辑“1”对应于“ $+a$ ”，得到幅值为 a 的离散输入信号 $\{x_i\}$.

6) 自相关函数特性：M序列 x_i 的自相关函数为

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} x_i x_{i-\tau} = \begin{cases} a^2 & \tau \equiv 0(\text{mod } N_p) \\ -\frac{1}{N_p} a^2 & \tau \not\equiv 0(\text{mod } N_p) \end{cases} \quad (3)$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 13 of 26

Go Back

Full Screen

Close

Quit



3.1.2 M3序列的产生与性质

M3序列即三位式最大长度线性移位寄存器序列，是一种伪随机三位式序列。组成移位寄存器的各个触发器具有三种状态“0”，“1”，“2”，线性反馈逻辑组合运算是模3加法。

定义3.4 模3域中的特征多项式，

$$F(x) = 1 \ominus_3 \sum_{i=1}^r \oplus_3 c_i x^i \quad c_i = 0, 1, 2 \quad (4)$$

式中 \ominus_3 表示模3减， $\sum \oplus_3$ 是模3累加，相应的反馈逻辑为

$$a_n = \sum_{i=1}^r \oplus_3 c_i a_{n-i} \quad (5)$$

定理3.4 产生M3序列的充要条件是 $F(x)$ 为本原多项式(模3域)。

- 3.1 伪随机序列
- 3.1.2 M3序列的产生与...
- 3.1.3 逆重复M序列
- 3.2 连续型伪随机信号
- 3.2.2 连续型伪随机信...

[Home Page](#)[Title Page](#)

Page 14 of 26

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



- 3.1 伪随机序列
- 3.1.2 M3序列的产生与...
- 3.1.3 逆重复M序列
- 3.2 连续型伪随机信号
- 3.2.2 连续型伪随机信...

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 15 of 26

Go Back

Full Screen

Close

Quit

表3.2 产生2 ~ 7级M3序列的反馈逻辑系数

r	2	3	4	5	6	7
$C_i(C_r \neq 0)$	1,1	0,1,2	0,0,1,1	0,0,0,1,2	0,0,0,0,1,1	0,0,0,0,1,0,2
	2,1	1,0,2	0,0,2,1	0,0,1,2,2	0,0,0,0,2,1	0,0,0,0,2,1,2
N_p	8	26	80	242	728	2186

例3.3 $F(x) = 1 \ominus_3 x^2 \ominus_3 2x^3$ 为模3域上的3次本原多项式，相应的产生通式：

$$a_n = a_{n-2} \oplus_3 2 \cdot a_{n-3} \quad (6)$$

产生的序列为0 0 1 0 1 2 1 1 2 0 1 1 1 0 0 2 0 2 1 2 2 1 0 2 2 2 0 0 1 ...,周期为 $N_p = 26$.



M3序列的性质如下:

- 1) 由 r 次模3域上的本原多项式产生的M3序列, 其周期为 $N_p = 3^r - 1$.
- 2) M3序列的一个周期 N_p 中, “0”的个数为 $3^{r-1} - 1$, “1”和“2”的个数各为 3^{r-1} .
- 3) 一个周期中(全“1”初态), 游程总数为 $2 * 3^{r-1}$ 个, 其中“0”, “1”, “2”游程数各占 $1/3$, 长度为 i 的游程数($1 \leq i \leq r - 2$)占总数的 $2/3^i$, 长度为 $r - 1$ 的“1”和“2”游程各有一个, “0”游程2个, 长度为 r 的“1”和“2”游程各一个, “0”游程无。
- 4) 移位相加特性: M3序列 $\{a_n\}$ 与它的移位 τ 后的序列 $\{a_{n-\tau}\}$ 按位模3加后, 仍为同样的M3序列(的某个移位), 除了移 $(3^r - 1)/2$ 之外。
- 5) 采样性质: 每隔 s 步采样, 仍得到M3序列, s 和 N_p 互质, 即 $(s, N_p) = 1$.

3.1 伪随机序列
3.1.2 M3序列的产生与...
3.1.3 逆重复M序列
3.2 连续型伪随机信号
3.2.2 连续型伪随机信...

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 16 of 26

Go Back

Full Screen

Close

Quit



在辨识中，逻辑“0”置换为电平“0”，“1”置换为电平“+a”，“2”置换为电平“-a”，得到伪随机信号 $\{x_i\}$ 。

6) 自相关函数特性：M3序列 $\{x_i\}$ 的自相关函数为

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} x_i x_{i-\tau} = \begin{cases} \frac{2}{3}(1 + \frac{1}{N_p})a^2, & \tau \equiv 0(\text{mod } N_p) \\ -\frac{2}{3}(1 + \frac{1}{N_p})a^2, & \tau = \frac{N_p}{2}(\text{mod } N_p) \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (7)$$

7) 周期均值为0.

$$\frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} x_i = 0 \quad (8)$$

8) 逆重复性。 $x_{i+N_p/2} = -x_i$ ，对 \forall_i 。

3.1 伪随机序列

3.1.2 M3序列的产生与...

3.1.3 逆重复M序列

3.2 连续型伪随机信号

3.2.2 连续型伪随机信...

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 17 of 26

Go Back

Full Screen

Close

Quit



3.1.3 逆重复M序列

逆重复M序列就是将M序列与二分频移位时钟脉冲方波按位模2加后得到的序列。

例3.4 已知模2域上的本原多项式 $1 \ominus x^2 \ominus x^3$ ，对应产生周期为7的M序列为1 1 1 0 0 1 0...，该序列与方波按位模2加，

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \oplus & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{array}$$

这样得到一周期为14的新序列。在实际应用中，把“0”换成电平“-a”，“1”换成电平“+a”，则得到一离散的周期信号 $\{x_i\}$ 。前半周期恰好是后半周期的逆重复，因为它源于M序列，所以称为逆重复M序列。

- 3.1 伪随机序列
- 3.1.2 M3序列的产生与...
- 3.1.3 逆重复M序列
- 3.2 连续型伪随机信号
- 3.2.2 连续型伪随机信...

[Home Page](#)[Title Page](#)

Page 18 of 26

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



3.1 伪随机序列
3.1.2 M3序列的产生与...
3.1.3 逆重复M序列
3.2 连续型伪随机信号
3.2.2 连续型伪随机信...

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 19 of 26

Go Back

Full Screen

Close

Quit

逆重复M序列的性质:

- 1) 逆重复M序列的周期 N_p 是原M序列的2倍, 即 $N_p = (2^r - 1) \cdot 2$.
- 2) 逆重复性。即 $x_{i+N_p/2} = -x_i$, 对 \forall_i .
- 3) 周期均值为0。

$$\frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} x_i = 0 \quad (9)$$

- 4) 逆重复M序列 $\{x_i\}$ 与原M序列 $\{x_i^0\}$ 是互不相关的。

$$R_{xx^0}(\tau) = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} x_i x_{i-\tau}^0 = 0 \quad (10)$$

- 5) 自相关函数特性: 逆重复M序列 $\{x_i\}$ 的自相关函数为

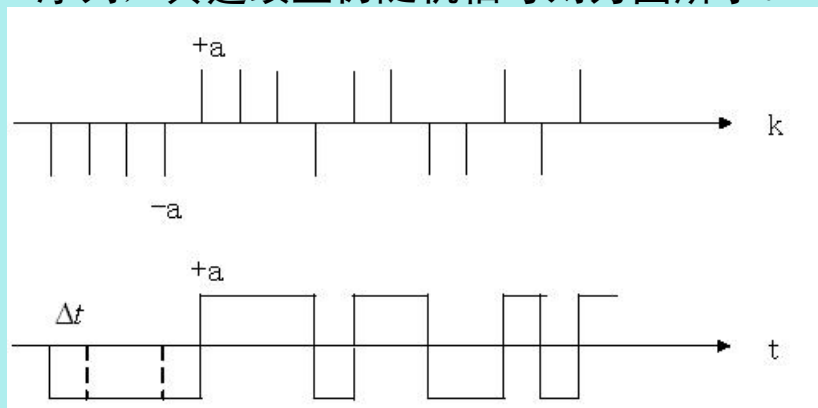
$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} x_i x_{i-\tau} = \begin{cases} a^2 & \tau \equiv 0 \pmod{N_p} \\ -a^2 & \tau = \frac{N_p}{2} \pmod{N_p} \\ -\frac{2}{N_p} a^2 & \tau = 2k, k = \pm 1, \pm 2, \dots \\ \frac{2}{N_p} a^2 & \tau = 2k + 1, k = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (11)$$



3.2 连续型伪随机信号

在系统辨识中，除了应用前面所述的各种伪随机序列外，还应用它们的连续信号形式。将伪随机序列在每个离散点上的状态电平值保持长度为 Δt 的时间，至下一个电平到来，这就得到了一连续型伪随机信号，周期为 $T_p = N_p \Delta t$ 。

如周期为15的M序列，其连续型伪随机信号则为图所示。



若记伪随机信号为 $\{U_k\}$ ，相应的连续信号为 $\{U(t)\}$ 。那么，当 $k\Delta t \leq t < (k+1)\Delta t$ 时， $U(t) = U_k$ 。

3.1 伪随机序列

3.1.2 M3序列的产生与...

3.1.3 逆重复M序列

3.2 连续型伪随机信号

3.2.2 连续型伪随机信...

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 20 of 26

Go Back

Full Screen

Close

Quit



3.2.1 连续型伪随机信号的自相关函数

连续型伪随机信号的自相关函数定义为

$$R_{uu}(\tau) = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} u(t)u(t + \tau)dt \quad (12)$$

注意，这里当 $t < 0$ 时， $U(t) \neq 0$ 。有

$$R_{uu}(\tau) = R_{uu}(-\tau) \quad (13)$$

显然，当 τ 为 Δt 的整数倍时，即 $\tau = k\Delta t$ 时，有

$$R_{uu}(k\Delta t) = R_{uu}(k) \quad (14)$$

当 $k\Delta t \leq \tau < (k + 1)\Delta t$ 时，取 $\tau = k\Delta t + l, 0 \leq l < \Delta t$ ，这时，可以证明

$$R_{uu}(\tau) = R_{uu}(k) + [R_{uu}(k + 1) - R_{uu}(k)] \cdot l/\Delta t \quad (15)$$

即 $R_{uu}(\tau)$ 的取值在 $(k\Delta t, R_{uu}(k))$ 和 $((k + 1)\Delta t, R_{uu}(k + 1))$ 两点之间连续直线上。

3.1 伪随机序列

3.1.2 M3序列的产生与...

3.1.3 逆重复M序列

3.2 连续型伪随机信号

3.2.2 连续型伪随机信...

Home Page

Title Page



Page 21 of 26

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 3.1 伪随机序列
- 3.1.2 M3序列的产生与 ...
- 3.1.3 逆重复M序列
- 3.2 连续型伪随机信号
- 3.2.2 连续型伪随机信 ...

定理3.5 广义连续型伪随机信号的自相关函数为

$$R_{uu}(\tau) = \left[\frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t - l} x(t)x(t+l)dt \right] R_{uu}(k) + \left[\frac{1}{\Delta t} \int_0^l x(t)x(t-l)dt \right] R_{uu}(k+1) \quad (16)$$

当 $k\Delta t \leq \tau < (k+1)\Delta t$ 时, 取 $\tau = k\Delta t + l, 0 \leq l < \Delta t$,

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 22 of 26](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



3.1 伪随机序列
3.1.2 M3序列的产生与...
3.1.3 逆重复M序列
3.2 连续型伪随机信号
3.2.2 连续型伪随机信...

3.2.2 连续型伪随机信号的功率谱密度

功率谱是描述信号的重要特征之一，其物理意义是：对于任何信号，我们将它分解成若干个(或无限个)不同频率的正弦信号分量。这些正弦波分量的功率谱与其频率的对应关系即为信号的功率谱。

对于连续信号，只须将其按Taylor级数展开，即可得到功率谱。这是直接的方法，但对伪随机序列来说，由于信号的变化具有一定的“随机”因素，很难用某个统一的数学公式表达出来。

求取信号功率谱的另一种方法是利用与自相关函数的关系，即

$$\Phi_{uu}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{uu}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (17)$$

上式称为**Wiener-Khintchine公式**，即信号 $u(t)$ 的功率谱 $\Phi_{uu}(j\omega)$ 是自相关函数 $R_{uu}(\tau)$ 的Fourier变换。由这个公式可得到

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 23 of 26

Go Back

Full Screen

Close

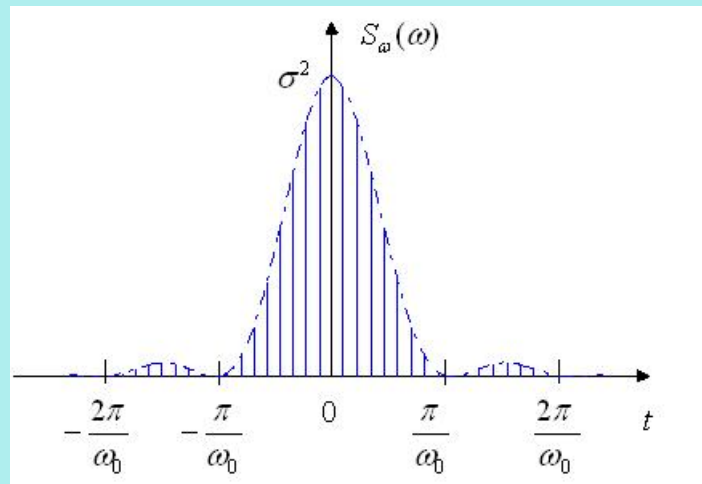
Quit



(1) 对于连续型M序列信号，其功率谱为

$$\Phi_{uu}(j\omega) = \frac{1}{N_p^2} P_0 \delta(\omega) + \frac{N_p + 1}{N_p^2} P_0 \left[\frac{\sin(\omega \Delta t / 2)}{\omega \Delta t / 2} \right]^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - i\omega_0) \quad (18)$$

其中 $\delta(\omega)$ 为(Dirac) δ 函数。



3.1 伪随机序列
3.1.2 M3序列的产生与...
3.1.3 逆重复M序列
3.2 连续型伪随机信号
3.2.2 连续型伪随机信...

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 24 of 26

Go Back

Full Screen

Close

Quit



- 3.1 伪随机序列
- 3.1.2 M3序列的产生与...
- 3.1.3 逆重复M序列
- 3.2 连续型伪随机信号
- 3.2.2 连续型伪随机信...

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[«](#) [»](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 25 of 26

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

可见，M序列的连续型信号的功率谱是一离散的谱，只在基波频率 $\omega_0 = 2\pi/T_p$ 的整数倍频率 $\omega = i\omega_0$ 上取值。为方便，可将 $\delta(\cdot)$ 改为(Kronecker) δ -函数，即

$$\delta(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega = 0 \\ 0 & \omega \neq 0 \end{cases} \quad (19)$$

这时 $\Phi_{uu}(j\omega)$ 所表示的是信号的功率谱密度，在各频率点处具有有限的幅度。

特别地，当 $\omega = 0.443N_p\omega_0$ 时，功率谱密度值较之 $\omega = \omega_0$ 时的值下降到最大值的70.71%，即下降了三分贝(db)。我们把这时的频率称为截止频率。

又当 $\omega = 0$ 时，功率谱密度值只有 $\frac{2\pi}{N_p^2}P_0$ ，远远低于 $\omega = \omega_0$ 时的值。

因此，M序列连续型信号的有效频带是

$$\omega_e = \omega_0 \sim (0.443N_p)\omega_0 \quad (20)$$



(2) 对于**M3伪随机序列连续型信号**，其功率谱密度为

$$\Phi_{uu}(j\omega) = \frac{2}{N_p} P_0 \left[\frac{\sin(\omega \Delta t / 2)}{\omega \Delta t / 2} \right]^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta[\omega - (2i + 1)\omega_0] \quad (21)$$

同(1)类似，有效频带为 $\omega_e = \omega_0 \sim (0.443N_p)\omega_0$.

(3) **逆重复M序列连续型信号**的功率谱密度为

$$\Phi_{uu}(j\omega) = \frac{2}{N_p} P_0 \left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{N_p + 2}{N_p} \left[\frac{\sin(\omega \Delta t / 2)}{\omega \Delta t / 2} \right]^2 \delta[\omega - (2i + 1)\omega_0] \right. \\ \left. - \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sin(\omega \Delta t / 2)}{\omega \Delta t / 2} \right]^2 \delta \left[\omega - (2i + 1) \frac{N_p}{2} \omega_0 \right] \right\}$$

在 $\omega_0 = 2\pi/T_p$ 的奇数倍频率处取值，信号的有效频带为 $\omega_e = \omega_0 \sim (0.443N_p)\omega_0$.

3.1 伪随机序列
3.1.2 M3序列的产生与...
3.1.3 逆重复M序列
3.2 连续型伪随机信号
3.2.2 连续型伪随机信...

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 26 of 26

Go Back

Full Screen

Close

Quit