



## 第2章 传递函数的辨识

### 2.2 传递函数辨识的频域法

作者：李鹏波、胡德文

单位：国防科技大学机电工程与自动化学院

Email: [gaoxia73@163.com](mailto:gaoxia73@163.com)

中国水利水电出版社版权所有



由实验测定系统的频率...

由实验频率响应辨识传...

Home Page

Title Page



Page 1 of 17

Go Back

Full Screen

Close

Quit



由实验测定系统的频率...  
由实验频率响应辨识传...

## 2.2 传递函数的辨识



2.2.1 由实验测定系统的频率响应



2.2.2 由实验频率响应辨识传递函数

Home Page

Title Page



Page 2 of 17

Go Back

Full Screen

Close

Quit



由实验测定系统的频率...  
由实验频率响应辨识传...

# 1 由实验测定系统的频率响应

在控制系统的分析和设计中，经常利用被识对象的频率特性作为模型的表达式。被识对象的动态特性用频率特性描述时，一般表达为

$$G(j\omega) = \left. \frac{Y(s)}{U(s)} \right|_{s=j\omega} = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} \quad (1)$$

式中 $Y(s)$ 是被识对象输出量的拉氏变换， $U(s)$ 是被识对象输入量的拉氏变换。式(1)亦可写成如下形式

$$Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega) \quad (2)$$

这表示当被识对象的输入端施加一个频率为 $\omega$ ，幅度为 $a_u$ ，相位为 $\theta_1$ 的正弦信号

$$u(t) = a_u \sin(\omega t + \theta_1) \quad (3)$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 3 of 17

Go Back

Full Screen

Close

Quit



由实验测定系统的频率...  
由实验频率响应辨识传...

对于线性系统，被识对象的输出量 $y(t)$ 将以同样的频率 $\omega$ 按正弦波变动，但其幅度为 $a_y$ ，相位为 $\theta_2$

$$y(t) = a_y \sin(\omega t + \theta_2) \quad (4)$$

输出幅度与输入幅度的比 $a_y/a_u = A$ 是随频率而变化的，称为**幅频特性**。输出相位与输入相位的差 $\theta_2 - \theta_1 = \varphi$ 亦是随频率而变化的，称为**相频特性**。幅频特性 $A(\omega)$ 和相频特性 $\varphi(\omega)$ 完全描述了被识对象的动态特性。频率特性 $G(j\omega)$ 与幅频特性 $A(\omega)$ 及相频特性 $\varphi(\omega)$ 的关系是

$$G(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \quad (5)$$

下面我们介绍利用周期测试信号和非周期测试信号求出被识对象频率特性的方法。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 4 of 17

Go Back

Full Screen

Close

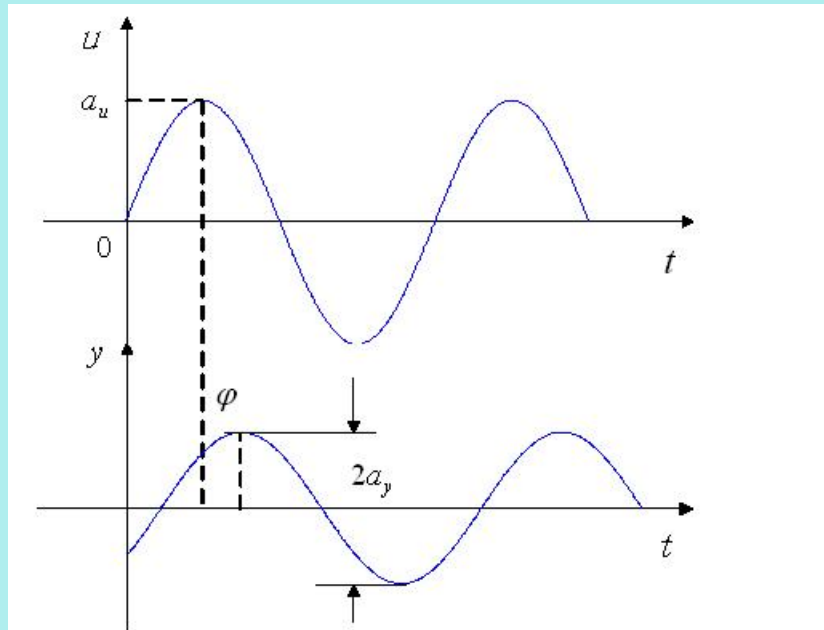
Quit



由实验测定系统的频率...  
由实验频率响应辨识传...

## 1. 周期测试信号

采用周期测试信号测定被识对象的频率特性时，所有的测量都应在过程已经处于稳定状态下进行，即由于初始条件等所产生的全部过渡过程均已消失。



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 5 of 17

Go Back

Full Screen

Close

Quit



由实验测定系统的频率...  
由实验频率响应辨识传...

## 2. 用非周期测试信号确定频率响应

根据式(1)，当噪声可以忽略时，过程的频率特性可由下式确定

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} \quad (6)$$

对输出信号 $y(t)$ 和输入信号 $u(t)$ 在等时间间隔点 $kT, k = 0, 1, \dots, N-1$ ，各点上进行 $N$ 次采样，得到有限数目的离散值 $\{y(k)\}$ 和 $\{u(k)\}$ 。注意，为了满足**Dirichlet条件**，在 $t$ 足够大( $t > NT$ )时，要求输出和输入信号都必须趋向于零。

对 $\{y(k)\}$ 和 $\{u(k)\}$ 进行离散傅立叶变换

$$\begin{cases} Y(jn\Delta\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} y(k)e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} \\ U(jn\Delta\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} u(k)e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \end{cases} \quad (7)$$

其中 $\Delta\omega = \frac{2\pi}{NT}$ ，上式中有限项求和代替了无穷积分。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 6 of 17

Go Back

Full Screen

Close

Quit



由实验测定系统的频率...  
由实验频率响应辨识传...

需要注意，如果输入输出信号不满足Dirichlet条件，则不能进行傅立叶变换。这时作为替代方法，可以对信号的一阶导数进行傅立叶变换。假定信号的导数可以满足Dirichlet条件，则可以证明，用简单的差分方程

$$\begin{cases} \Delta y(k) = y(k+1) - y(k) \\ \Delta u(k) = u(k+1) - u(k) \end{cases} \quad (8)$$

进行离散傅立叶变换，同样可以得到过程的频率响应，即

$$G(jn\Delta\omega) = \frac{DFT(\Delta y(k))}{DFT(\Delta u(k))} \quad (9)$$

进行离散傅立叶变换时，为加快计算速度，提高计算效率，一般都采用快速傅立叶变换(FFT)算法来完成。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 7 of 17

Go Back

Full Screen

Close

Quit



由实验测定系统的频率...  
由实验频率响应辨识传...

## 2 由实验频率响应辨识传递函数

### ★ 利用Bode图方法求传递函数

如果实验测定了系统的频率响应，则可以利用幅频特性曲线、相频特性曲线和幅相特性曲线求得传递函数，即Bode图方法。

### ★ 频率特性拟合的Levy法

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 8 of 17

Go Back

Full Screen

Close

Quit





由实验测定系统的频率...  
由实验频率响应辨识传...

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 9 of 17

Go Back

Full Screen

Close

Quit

## 频率特性拟合的Levy法

如果已经获得过程的实频特性 $Re(\omega)$ 和虚频特性 $Im(\omega)$ ，则可利用 $Re(\omega)$ 和 $Im(\omega)$ 来估计过程的传递函数。设一个最小相位过程的传递函数写成

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + 1} \quad (10)$$

式中 $n > m$ ，对应的频率响应为

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{(b_0 - b_2\omega^2 + b_4\omega^4 - \cdots) + j\omega(b_1 - b_3\omega^2 + b_5\omega^4 \cdots)}{(1 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \cdots) + j\omega(a_1 - a_3\omega^2 + a_5\omega^4 \cdots)} \\ &= \frac{\alpha(\omega) + j\beta(\omega)}{\sigma(\omega) + j\tau(\omega)} \equiv \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} \end{aligned}$$

记参数向量为

$$\theta = [b_0, b_1, \dots, b_m, a_1, \dots, a_n]$$

设实测的频率特性数据

$$G^*(j\omega_i) = Re(\omega_i) + jIm(\omega_i), \quad i = 1 \sim N \quad (11)$$

在频率点 $\omega_i$ 上，估计的频率响应与实测的频率响应的误差记作

$$\begin{aligned} \varepsilon_i = \varepsilon_i(j\omega) &= G^*(j\omega_i) - G(j\omega_i) \\ &= Re(\omega_i) + jIm(\omega_i) - \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} \end{aligned} \quad (12)$$



由实验测定系统的频率...  
由实验频率响应辨识传...

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 10 of 17

Go Back

Full Screen

Close

Quit

记参数向量为

$$\theta = [b_0, b_1, \dots, b_m, a_1, \dots, a_n]$$

设实测的频率特性数据

$$G^*(j\omega_i) = Re(\omega_i) + jIm(\omega_i), \quad i = 1 \sim N \quad (11)$$

在频率点 $\omega_i$ 上, 估计的频率响应与实测的频率响应的误差记作

$$\begin{aligned} \varepsilon_i = \varepsilon_i(j\omega) &= G^*(j\omega_i) - G(j\omega_i) \\ &= Re(\omega_i) + jIm(\omega_i) - \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} \end{aligned} \quad (12)$$

采用最小二乘准则, 即

$$J = \sum_{i=1}^N \|\varepsilon(j\omega_i)\|^2 = \min \quad (13)$$

原则上说可以求得传递函数 $G(s)$ 的系数。但是, 这个误差准则关于参数空间是非线性的, 解这种极小值问题相当困难。



由实验测定系统的频率...  
由实验频率响应辨识传...

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 10 of 17

Go Back

Full Screen

Close

Quit

记参数向量为

$$\theta = [b_0, b_1, \dots, b_m, a_1, \dots, a_n]$$

设实测的频率特性数据

$$G^*(j\omega_i) = Re(\omega_i) + jIm(\omega_i), \quad i = 1 \sim N \quad (11)$$

在频率点 $\omega_i$ 上, 估计的频率响应与实测的频率响应的误差记作

$$\begin{aligned} \varepsilon_i = \varepsilon_i(j\omega) &= G^*(j\omega_i) - G(j\omega_i) \\ &= Re(\omega_i) + jIm(\omega_i) - \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} \end{aligned} \quad (12)$$

采用最小二乘准则, 即

$$J = \sum_{i=1}^N \|\varepsilon(j\omega_i)\|^2 = \min \quad (13)$$

原则上说可以求得传递函数 $G(s)$ 的系数。但是, 这个误差准则关于参数空间是非线性的, 解这种极小值问题相当困难。Levy修正了式(13)的误差准则, 提出采用如下的加权最小二乘准则。

$$J = \sum_{i=1}^N \|D(j\omega_i)\varepsilon(j\omega_i)\|^2 \quad (14)$$

这就使得问题变成线性极小化问题。



由实验测定系统的频率...  
由实验频率响应辨识传...

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 10 of 17

Go Back

Full Screen

Close

Quit



由实验测定系统的频率...  
由实验频率响应辨识传...

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 11 of 17

Go Back

Full Screen

Close

Quit

根据式(11)和式(12)，式(14)可以写成

$$\begin{aligned} J^* &= \sum_{i=1}^N \|e_i\|^2 = \sum_{i=1}^N \|(P_i + jQ_i)D(j\omega_i) - N(j\omega_i)\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \|H(\omega_i) + jF(\omega_i)\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^N [H^2(\omega_i) + F^2(\omega_i)] \end{aligned} \quad (15)$$

其中

$$\begin{aligned} H(\omega_i) &= P_i\sigma(\omega_i) - Q_i\tau(\omega_i) - \alpha(\omega_i) \\ F(\omega_i) &= Q_i\sigma(\omega_i) + P_i\tau(\omega_i) - \beta(\omega_i) \end{aligned}$$



由实验测定系统的频率...  
由实验频率响应辨识传...

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 11 of 17

Go Back

Full Screen

Close

Quit

根据式(11)和式(12)，式(14)可以写成

$$\begin{aligned} J^* &= \sum_{i=1}^N \|e_i\|^2 = \sum_{i=1}^N \|(P_i + jQ_i)D(j\omega_i) - N(j\omega_i)\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \|H(\omega_i) + jF(\omega_i)\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^N [H^2(\omega_i) + F^2(\omega_i)] \end{aligned} \quad (15)$$

其中

$$\begin{aligned} H(\omega_i) &= P_i\sigma(\omega_i) - Q_i\tau(\omega_i) - \alpha(\omega_i) \\ F(\omega_i) &= Q_i\sigma(\omega_i) + P_i\tau(\omega_i) - \beta(\omega_i) \end{aligned}$$

令  $\frac{\partial J^*}{\partial \theta} = 0$ ，亦即

$$\sum_{i=1}^N \left[ H(\omega_i) \frac{\partial H(\omega_i)}{\partial \theta} + F(\omega_i) \frac{\partial F(\omega_i)}{\partial \theta} \right] = 0 \quad (16)$$



由实验测定系统的频率...  
由实验频率响应辨识传...

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 12 of 17

Go Back

Full Screen

Close

Quit

定义

$$\begin{aligned} V_{2k} &= \sum_{i=1}^N \omega_i^{2k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, m \\ S_{2k} &= \sum_{i=1}^N P_i \omega_i^{2k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, \left[\frac{m+n}{2}\right] \\ T_{2k+1} &= \sum_{i=1}^N Q_i \omega_i^{2k+1} \quad k = 0, 1, 2, \dots, \left[\frac{m+n}{2}\right] \\ U_{2k} &= \sum_{i=1}^N (P_i^2 + Q_i^2) \omega_i^{2k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

式(16)经整理求得

$$\theta = \Phi^{-1}Y \quad (17)$$



由实验测定系统的频率...  
由实验频率响应辨识传...

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 13 of 17

Go Back

Full Screen

Close

Quit

其中

$$\Phi = \begin{pmatrix} V_0 & 0 & -V_2 & 0 & V_4 & \cdots & T_1 & S_2 & -T_3 & -S_4 & T_5 & \cdots \\ 0 & V_2 & 0 & -V_4 & 0 & \cdots & -S_2 & T_3 & S_4 & -T_5 & -S_6 & \cdots \\ V_2 & 0 & -V_4 & 0 & V_6 & \cdots & T_3 & S_4 & -T_5 & -S_6 & T_7 & \cdots \\ 0 & V_4 & 0 & -V_6 & 0 & \cdots & -S_4 & T_5 & S_6 & -T_7 & -T_8 & \cdots \\ V_4 & 0 & -V_6 & 0 & V_8 & \cdots & T_5 & S_6 & -T_7 & -S_8 & T_9 & \cdots \\ & & \cdots & & & & & & \cdots & & & \\ T_1 & -S_2 & -T_3 & S_4 & T_5 & \cdots & U_2 & 0 & -U_4 & 0 & U_6 & \cdots \\ S_2 & T_3 & -S_4 & -T_5 & S_6 & \cdots & 0 & U_4 & 0 & -U_6 & 0 & \cdots \\ T_3 & -S_4 & -T_5 & S_6 & T_7 & \cdots & U_4 & 0 & -U_6 & 0 & U_8 & \cdots \\ S_4 & T_5 & -S_6 & -T_7 & S_8 & \cdots & 0 & U_6 & 0 & -U_8 & 0 & \cdots \\ T_5 & -S_6 & -T_7 & S_8 & T_9 & \cdots & U_6 & 0 & -U_8 & 0 & U_{10} & \cdots \\ & & \cdots & & & & & & \cdots & & & \end{pmatrix}$$

$$Y = \underbrace{[S_0 \ T_1 \ S_2 \ T_3 \ S_4 \ \cdots]}_{m+1 \text{个元素}} \underbrace{[0 \ U_2 \ 0 \ U_4 \ 0 \ \cdots]}_{n \text{个元素}}]^T$$

解式(17)便可求得相应的传递函数的系数。





由实验测定系统的频率...  
由实验频率响应辨识传...

Home Page

Title Page



Page 14 of 17

Go Back

Full Screen

Close

Quit

例2.2 某系统用频率测试仪所记录的频率响应数据如表2.3所示。  
按Levy法进行频率特性拟合，得到的模型为

$$G(s) = \frac{3.5908s + 0.9852}{4.7804s^2 + 5.760s + 1}$$

表2.3 某系统的频率响应特性

$f(Hz)$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
$Am$	0.75	0.74	0.74	0.73	0.72	0.70	0.69	0.68
$Phi$	-0.06	-0.12	-0.17	-0.23	-0.28	-0.33	-0.38	-0.45
$f(Hz)$	0.10	0.13	0.20					
$Am$	0.75	0.74	0.74					
$Phi$	-0.52	-0.63	-0.82					

而系统的真实模型为

$$G(s) = \frac{3.6s + 1}{4.8s^2 + 5.8s + 1}$$

可见，由Levy法估计所得模型的精度是比较高的。本例中频率响应特性的测量精度并不高，只精确到二位有效数字。如果测量精度更高些，则估计参数应更精确些。



由实验测定系统的频率...  
由实验频率响应辨识传...

由于Matlab是目前最流行的**控制系统辅助设计工具**，开发程序的效率很高，所以Matlab已成为控制系统工程师首要的编程工具，进行辅助设计和仿真验证。本例的Matlab源程序example2\_2.m为

```
clear all;
w=[0.01,0.02,0.03,0.04,0.05,0.06,0.07,0.08,0.1,0.13,0.2].*2.*pi; %角频率
Am=[0.75,0.74,0.74,0.73,0.72,0.70,0.69,0.68,0.64,0.59,0.48]; %幅频特性
Phi=[-0.06,-0.12,-0.17,-0.23,-0.28,-0.33,-0.38,-0.45,-0.52,-0.63,-0.82]; %相频特性
P=Am.*cos(Phi); %频率响应特性的实部
Q=Am.*sin(Phi); %频率响应特性的虚部
H=P+i.*Q; %频率响应特性
[n,d]=freq2levy(H,w,2,1); %Levy法频率特性拟合
[n1,d1]=invfreqs(H,w,1,2); %工具箱中的频率特性拟合函数
```

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 15 of 17

Go Back

Full Screen

Close

Quit

上述代码中调用的Levy法频率特性拟合函数freq2levy并不是Matalb工具箱中已有的函数，而是用户开发的。freq2levy函数在Freq2levy.m文件中定义，源程序如下

```
function [num,den]=FREQ2LEVY(H,w,na,nb)
% FREQ2LEVY Analog filter weighted least squares fit to frequency
% response data by Levy algorithm...
% [NUM,DEN]=FREQ2LEVY(H,W,NA,NB) gives real numerator and denominator
% coefficients NUM and DEN of orders NB and NA respectively, where
% H is the desired complex frequency response of the system at
% frequency points W, and W contains the frequency values in radians/s.
% FREQ2LEVY yields a filter with real coefficients. This means that
% it is sufficient to specify positive frequencies only; the filter
% fits the data conj(H) at -W, ensuring the proper frequency domain
% symmetry for a real filter.
P=real(H); Q=imag(H); M=length(w);
for i=1:2:na+nb+1
    L(i)=sum(w.^(i-1)); S(i)=sum(w.^(i-1).*P);
    S(i+1)=sum(w.^i.*Q); U(i+2)=sum(w.^(i+1).*(P.^2+Q.^2));
end ii=[1,1];
```



由实验测定系统的频率...  
由实验频率响应辨识传...

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 16 of 17

Go Back

Full Screen

Close

Quit

```

for i=1:na    ii=[ii -ii(2*i-1:2*i)]; end
Gxx=L(1:na).*ii(1:na);
Gxy=S(2:nb+2).*ii(1:nb+1); Gyy=U(3:nb+3).*ii(1:nb+1);
for i=1:na-1
    Gxx=[Gxx; -Gxx(1,2:na) L(na+i)*ii(na-i)];
    Gxy=[Gxy; -Gxy(i,2:nb+1) S(nb+2+i)*ii(na-i)];
end
for i=1:nb
    Gyy=[Gyy; -Gyy(i,2:nb+1) U(nb+i+3)*ii(nb+1-i)];
end
G=[Gxx, Gxy; Gxy', Gyy];
V=[S(1:na).*ii(1:na), U(2:nb+2).*ii(1:nb+1)]';
V1=inv(G)*V; num=V1(nb+1:-1:1)'; den=[V1(na+nb+1:-1:nb+2)' 1];
num=num/den(1); den=den/den(1);

```

freq2levy函数中， $H, w, na, nb$ 为输入参数， $num, den$ 为输出参数，函数说明语句之后紧接的注释语句，则提供了该函数的帮助信息。



由实验测定系统的频率...  
由实验频率响应辨识传...

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 17 of 17

Go Back

Full Screen

Close

Quit