



第2章 传递函数的辨识

2.1 传递函数辨识的时域法

作者：李鹏波、胡德文

单位：国防科技大学机电工程与自动化学院

Email: gaoxia73@163.com

中国水利水电出版社版权所有



一阶惯性滞后环节的辨识
二阶自衡对象的辨识
二阶欠阻尼自衡对象的...
高阶自衡对象的辨识
自衡等容对象的辨识
无自衡对象的传递函数...
面积法

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 1 of 28

Go Back

Full Screen

Close

Quit



一阶惯性滞后环节的辨识
二阶自衡对象的辨识
二阶欠阻尼自衡对象的...
高阶自衡对象的辨识
自衡等容对象的辨识
无自衡对象的传递函数...
面积法

在经典的控制系统的分析与设计中，通常采用传递函数来描述系统的动态特性。因此，如何辨识系统的传递函数就成为了经典控制理论中一个必不可少的环节。经典的传递函数辨识方法可以分为时域法和频域法这两种。所谓“经典”，是相对现代的一些方法而言较为成熟的方法，这并不意味着这些方法已经过时或被现代的方法所取代，事实上，它们在动态系统辨识如工业过程辨识中仍然起着非常重要的作用。这些方法也可以为现代辨识方法提供许多必不可少的先验信息。

本章介绍传递函数辨识的时域法和频域法，时域法中详细介绍了应用阶跃响应辨识几种典型的传递函数，频域法中介绍了由实验测得系统的频率响应，以及应用实验频率响应辨识系统的传递函数。重点介绍了频率特性拟合的Levy法及其Matlab函数。

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀](#) [▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 2 of 28

[Go Back](#)

[Full Screen](#)








[Close](#)

[Quit](#)



一阶惯性滞后环节的辨识
二阶自衡对象的辨识
二阶欠阻尼自衡对象的 ...
高阶自衡对象的辨识
自衡等容对象的辨识
无自衡对象的传递函数 ...
面积法

2.1 传递函数辨识的时域法

-  2.1.1 一阶惯性滞后环节的辨识
-  2.1.2 二阶自衡对象的辨识
-  2.1.3 二阶欠阻尼自衡对象的辨识
-  2.1.4 高阶自衡对象的辨识
-  2.1.5 自衡等容对象的辨识
-  2.1.6 无自衡对象传递函数的辨识
-  2.1.7 面积法

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 3 of 28

Go Back

Full Screen

Close

Quit



一阶惯性滞后环节的辨识
二阶自衡对象的辨识
二阶欠阻尼自衡对象的 ...
高阶自衡对象的辨识
自衡等容对象的辨识
无自衡对象的传递函数 ...
面积法

传递函数辨识的时域法

传递函数辨识的时域方法包括**阶跃响应法**、**脉冲响应法**和**矩形脉冲响应法**等，其中以阶跃响应法最为常用。阶跃响应法利用阶跃响应曲线对系统传递函数进行辨识，阶跃响应曲线即输入量作阶跃变化时，系统输出的变化曲线。在工业过程控制系统的辨识中，阶跃响应曲线又常被称为飞升曲线或系统的飞升特性。如果系统不含有积分环节，那么阶跃输入下，系统的输出将渐近于一新的稳定状态，称系统具有自平衡特性，或称为自衡对象。否则，系统称为无自衡对象，输出无限制地扩大或减小，说明系统至少具有一个纯积分环节。

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀](#) [▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 4 of 28

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



一阶惯性滞后环节的辨识
二阶自衡对象的辨识
二阶欠阻尼自衡对象的...
高阶自衡对象的辨识
自衡等容对象的辨识
无自衡对象的传递函数...
面积法

用阶跃响应辨识的典型传递函数有如下几种：

$$G(s) = \frac{K e^{-\tau s}}{T s + 1} \quad (1)$$

$$G(s) = \frac{K e^{-\tau s}}{(T s_1 + 1)(T s_2 + 1)} \quad (2)$$

$$G(s) = \frac{K e^{-\tau s}}{(T s_1 + 1)(T s_2 + 1)(T s_3 + 1)} \quad (3)$$

$$G(s) = \frac{K e^{-\tau s}}{(T s + 1)^n} \quad (4)$$

$$G(s) = \frac{K e^{-\tau s}}{s(T s + 1)^n} \quad (5)$$

显然，前四种均为自衡对象，最后一种为无自衡对象。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 5 of 28

Go Back

Full Screen

Close

Quit



设系统的输入 u 的变化量为 ΔU ，那么它的拉氏变换 $U(s)$ 为 $\Delta U/s$ 。根据传递函数的定义，输出 $y(t)$ 的拉氏变换 $Y(s)$ 为

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) \quad (6)$$

一阶惯性滞后环节的辨识
二阶自衡对象的辨识
二阶欠阻尼自衡对象的...
高阶自衡对象的辨识
自衡等容对象的辨识
无自衡对象的传递函数...
面积法

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 6 of 28

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



一阶惯性滞后环节的辨识
二阶自衡对象的辨识
二阶欠阻尼自衡对象的...
高阶自衡对象的辨识
自衡等容对象的辨识
无自衡对象的传递函数...
面积法

设系统的输入 u 的变化量为 ΔU ，那么它的拉氏变换 $U(s)$ 为 $\Delta U/s$ 。根据传递函数的定义，输出 $y(t)$ 的拉氏变换 $Y(s)$ 为

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) \quad (6)$$

根据拉氏变换终值定理，对于自衡对象式(1)至式(4)， $y(\infty)$ 存在，则有

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} Y(s) \cdot s = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \cdot U(s) \cdot s = K \cdot \Delta U$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 6 of 28

Go Back

Full Screen

Close

Quit



一阶惯性滞后环节的辨识
二阶自衡对象的辨识
二阶欠阻尼自衡对象的...
高阶自衡对象的辨识
自衡等容对象的辨识
无自衡对象的传递函数...
面积法

设系统的输入 u 的变化量为 ΔU ，那么它的拉氏变换 $U(s)$ 为 $\Delta U/s$ 。根据传递函数的定义，输出 $y(t)$ 的拉氏变换 $Y(s)$ 为

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) \quad (6)$$

根据拉氏变换终值定理，对于自衡对象式(1)至式(4)， $y(\infty)$ 存在，则有

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} Y(s) \cdot s = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \cdot U(s) \cdot s = K \cdot \Delta U$$

即自衡对象的放大倍数为

$$K = \frac{y(\infty)}{\Delta U} \quad (7)$$

在经典的辨识中，自衡对象的放大倍数 K 目前均采用式(7)，其中 $y(\infty)$ 为阶跃响应曲线的稳态值，即输出的最终值。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 6 of 28

Go Back

Full Screen

Close

Quit



对于式(5)这样的无自衡对象， $y(\infty)$ 不存在，但 $y'(\infty)$ 却存在。由终值定理：

$$y'(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot Y(s) = K \cdot \Delta U$$

即无自衡对象的放大倍数为

$$K = \frac{y'(\infty)}{\Delta U} \quad (8)$$

一阶惯性滞后环节的辨识
二阶自衡对象的辨识
二阶欠阻尼自衡对象的...
高阶自衡对象的辨识
自衡等容对象的辨识
无自衡对象的传递函数...
面积法

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 7 of 28

Go Back

Full Screen

Close

Quit



对于式(5)这样的无自衡对象， $y(\infty)$ 不存在，但 $y'(\infty)$ 却存在。由终值定理：

$$y'(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot Y(s) = K \cdot \Delta U$$

即无自衡对象的放大倍数为

$$K = \frac{y'(\infty)}{\Delta U} \quad (8)$$

显然， $y'(\infty)$ 为阶跃响应的终态斜率，它是阶跃响应 $y(t)$ 渐近线的斜率。

至于传递函数的纯时滞 τ ，一般均采用目测阶跃响应曲线接近零值的时间长度得到的，为与以下的近似所得的等价时滞相区别，记为 τ_0 。

下面的各项辨识是在放大倍数 K 和纯时滞 τ_0 已知的情况下进行的。

一阶惯性滞后环节的辨识
二阶自衡对象的辨识
二阶欠阻尼自衡对象的...
高阶自衡对象的辨识
自衡等容对象的辨识
无自衡对象的传递函数...
面积法

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀](#) [▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 7 of 28

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

1 一阶惯性滞后环节的辨识

根据拉氏变换可知，它的阶跃响应曲线是一条负指数规律上升的曲线，即

$$y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \tau \\ K\Delta U(1 - e^{-\frac{t-\tau}{T}}), & t \geq \tau \end{cases} \quad (9)$$



一阶惯性滞后环节的辨识
二阶自衡对象的辨识
二阶欠阻尼自衡对象的...
高阶自衡对象的辨识
自衡等容对象的辨识
无自衡对象的传递函数...
面积法

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 8 of 28

Go Back

Full Screen

Close

Quit

1 一阶惯性滞后环节的辨识

根据拉氏变换可知，它的阶跃响应曲线是一条负指数规律上升的曲线，即

$$y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \tau \\ K\Delta U(1 - e^{-\frac{t-\tau}{T}}), & t \geq \tau \end{cases} \quad (9)$$

将阶跃响应曲线化为无因次曲线 $s(t) = y(t)/y(\infty)$ ，即在阶跃曲线上，认定其新的稳态值 $y(\infty) = 1$ 。本章中，统一用无因次阶跃响应曲线。对于式(1)的系统，得到无因次阶跃响应曲线为

$$y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \tau \\ 1 - e^{-\frac{t-\tau}{T}}, & t \geq \tau \end{cases} \quad (10)$$



一阶惯性滞后环节的辨识
二阶自衡对象的辨识
二阶欠阻尼自衡对象的...
高阶自衡对象的辨识
自衡等容对象的辨识
无自衡对象的传递函数...
面积法

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 8 of 28

Go Back

Full Screen

Close

Quit

1 一阶惯性滞后环节的辨识

根据拉氏变换可知，它的阶跃响应曲线是一条负指数规律上升的曲线，即

$$y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \tau \\ K\Delta U(1 - e^{-\frac{t-\tau}{T}}), & t \geq \tau \end{cases} \quad (9)$$

将阶跃响应曲线化为无因次曲线 $s(t) = y(t)/y(\infty)$ ，即在阶跃曲线上，认定其新的稳态值 $y(\infty) = 1$ 。本章中，统一用无因次阶跃响应曲线。对于式(1)的系统，得到无因次阶跃响应曲线为

$$y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \tau \\ 1 - e^{-\frac{t-\tau}{T}}, & t \geq \tau \end{cases} \quad (10)$$

当 $t = T + \tau$ 时， $y(t)=0.632$ 。据此，我们在阶跃响应曲线上找到 $y(t) = 0.632$ 所对应的时间，减去时滞 τ ，即为系统的时间常数 T 。



一阶惯性滞后环节的辨识
二阶自衡对象的辨识
二阶欠阻尼自衡对象的...
高阶自衡对象的辨识
自衡等容对象的辨识
无自衡对象的传递函数...
面积法

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 8 of 28

Go Back

Full Screen

Close

Quit

1 一阶惯性滞后环节的辨识

根据拉氏变换可知，它的阶跃响应曲线是一条负指数规律上升的曲线，即

$$y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \tau \\ K\Delta U(1 - e^{-\frac{t-\tau}{T}}), & t \geq \tau \end{cases} \quad (9)$$

将阶跃响应曲线化为无因次曲线 $s(t) = y(t)/y(\infty)$ ，即在阶跃曲线上，认定其新的稳态值 $y(\infty) = 1$ 。本章中，统一用无因次阶跃响应曲线。对于式(1)的系统，得到无因次阶跃响应曲线为

$$y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \tau \\ 1 - e^{-\frac{t-\tau}{T}}, & t \geq \tau \end{cases} \quad (10)$$

当 $t = T + \tau$ 时， $y(t)=0.632$ 。据此，我们在阶跃响应曲线上找到 $y(t) = 0.632$ 所对应的时间，减去时滞 τ ，即为系统的时间常数 T 。

在实际辨识过程中，阶跃响应不一定正好是具有负指数规律上升的曲线，但只要是如图1所示的S型非周期曲线，则系统可采用一阶传递函数来近似，一般采用两种方法。

★ 切线法

★ 两点法



一阶惯性滞后环节的辨识
二阶自衡对象的辨识
二阶欠阻尼自衡对象的...
高阶自衡对象的辨识
自衡等容对象的辨识
无自衡对象的传递函数...
面积法

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 8 of 28

Go Back

Full Screen

Close

Quit

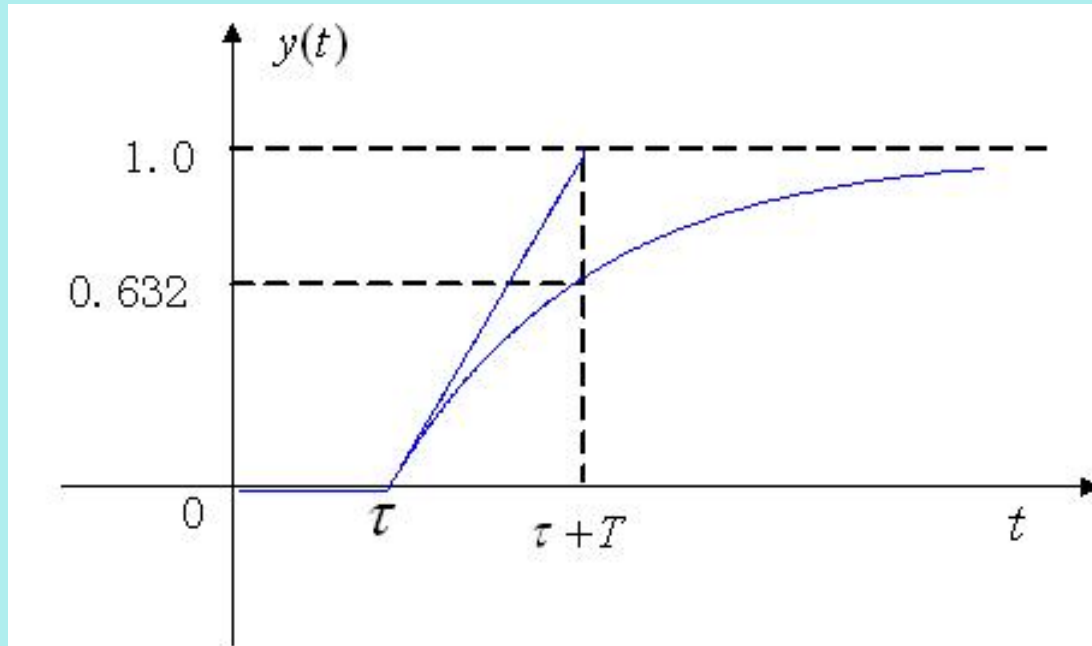


一阶惯性滞后环节的辨识
二阶自衡对象的辨识
二阶欠阻尼自衡对象的...
高阶自衡对象的辨识
自衡等容对象的辨识
无自衡对象的传递函数...
面积法

★ 切线法

在S型曲线的变化速率最快处作一切线，分别与时间轴 t 及阶跃响应的渐近线 $y(\infty)$ 相交于 $(0, \tau)$ 和 $(t_0, y(\infty))$ ，这样即得到了式(1)的时滞 τ ，而时间常数为 $T = t_0 - \tau$ 。

参数 τ 和 T 的这种求解法也可称为图解法，其优点是特别简单。但对于一些实际响应曲线寻找该曲线的最大斜率处并非易事，主观因素也比较大。



[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀](#) [▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 9 of 28

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



一阶惯性滞后环节的辨识
二阶自衡对象的辨识
二阶欠阻尼自衡对象的...
高阶自衡对象的辨识
自衡等容对象的辨识
无自衡对象的传递函数...
面积法

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 10 of 28

Go Back

Full Screen

Close

Quit

★ 两点法

在 $y(t)$ 上选取两个坐标值 $(t_1, y(t_1))$ 和 $(t_2, y(t_2))$ ，只要求 $0, y(t_1), y(t_2)$ 这三个数值之间有明显的差异即可。则

$$\begin{cases} y(t_1) = 1 - e^{-\frac{t_1 - \tau}{T}} \\ y(t_2) = 1 - e^{-\frac{t_2 - \tau}{T}}, \quad t_2 > t_1 > \tau \end{cases} \quad (11)$$

式中 $y(t_1), y(t_2)$ 分别记为 Y_1, Y_2 。解得

$$\begin{cases} T = \frac{t_2 - t_1}{\ln(1 - Y_1) - \ln(1 - Y_2)} \\ \tau = \frac{t_2 \ln(1 - Y_1) - t_1 \ln(1 - Y_2)}{\ln(1 - Y_1) - \ln(1 - Y_2)} \end{cases} \quad (12)$$

如果选择 $y(t_1) = 0.39$ 和 $y(t_2) = 0.63$ 这两个固定值，那么 τ 和 T 可化为 $\tau = 2t_1 - t_2$ ， $T = 2(t_2 - t_1)$ 。显然，这时的计算非常简单。对于以上结果，还可在

$$\begin{aligned} t_3 &\leq \tau & y(t_3) &= 0 \\ t_4 &= 0.8T + \tau & y(t_4) &= 0.55 \\ t_5 &= 2T + \tau & y(t_5) &= 0.87 \end{aligned}$$

这几点上对实际曲线的拟合精度进行检验。

2 二阶自衡对象的辨识

对于具有传递函数式(2)的系统，将阶跃响应曲线化为无因次曲线，设纯时滞 τ 已知，为简单起见，设 $\tau = 0$ 。由拉氏变换得无因次阶跃响应曲线为

$$y(t) = 1 + \frac{T_1}{T_2 - T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2}{T_2 - T_1} e^{-\frac{t}{T_2}} \quad (13)$$



一阶惯性滞后环节的辨识
二阶自衡对象的辨识
二阶欠阻尼自衡对象的...
高阶自衡对象的辨识
自衡等容对象的辨识
无自衡对象的传递函数...
面积法

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 11 of 28

Go Back

Full Screen

Close

Quit

2 二阶自衡对象的辨识

对于具有传递函数式(2)的系统, 将阶跃响应曲线化为无因次曲线, 设纯时滞 τ 已知, 为简单起见, 设 $\tau = 0$ 。由拉氏变换得无因次阶跃响应曲线为

$$y(t) = 1 + \frac{T_1}{T_2 - T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2}{T_2 - T_1} e^{-\frac{t}{T_2}} \quad (13)$$

令 $2T = T_1 + T_2$, 并引入无因次时间 $t^* = \frac{t}{2T}$ 。记 $T_1^* = \frac{T_1}{2T}$, $T_2^* = \frac{T_2}{2T}$, 则

$$y(t^*) = 1 + \frac{T_1^*}{T_2^* - T_1^*} e^{-\frac{t^*}{T_1^*}} - \frac{T_2^*}{T_2^* - T_1^*} e^{-\frac{t^*}{T_2^*}} \quad (14)$$

令 $\Delta = T_1^* - T_2^*$, 则 $T_1^* = \frac{1+\Delta}{2}$, $T_2^* = \frac{1-\Delta}{2}$

$$y(t^*) = 1 + \frac{1+\Delta}{2\Delta} e^{-t^* \frac{2}{1+\Delta}} + \frac{1-\Delta}{2\Delta} e^{-t^* \frac{2}{1-\Delta}} \quad (15)$$

式(15)只与 $y(t^*)$, t^* , Δ 这三个参数有关。若进一步地令 $y(t^*) = 0.7$, 这时式(15)变为只含 t_7^* 和 Δ 两个参数量的隐式表达式。这可以通过计算出 t_7^* 和 Δ 之间的数值对应关系。通过绘制曲线可以发现, 当 Δ^2 在0和1之间变化时, t_7^* 的值在1.2附近变动, 最大相对误差不超过1.7%。因此, 我们取定 $t_7^* = 1.2$, 这在工程上是允许的。



一阶惯性滞后环节的辨识
二阶自衡对象的辨识
二阶欠阻尼自衡对象的...
高阶自衡对象的辨识
自衡等容对象的辨识
无自衡对象的传递函数...
面积法

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 11 of 28

Go Back

Full Screen

Close

Quit

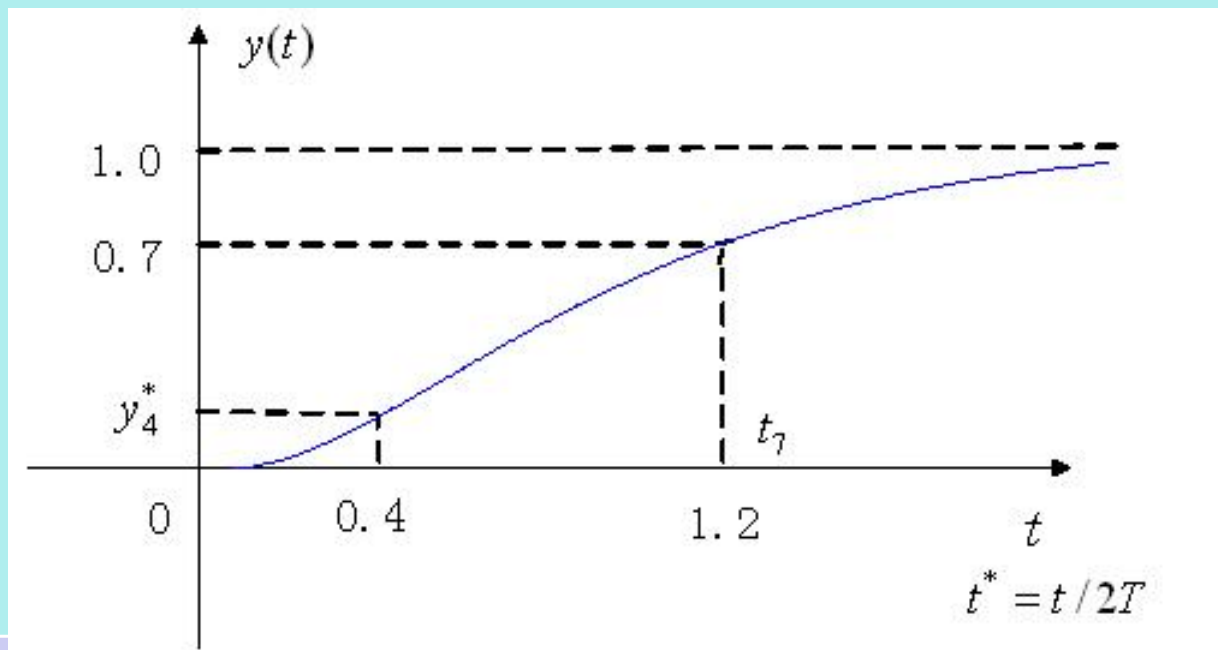
从无因次曲线 $y(t)$ 上找到 $y(t_7) = 0.7$ 所对应的时间 t_7 ，得到

$$T = \frac{t}{2t^*} = \frac{t_7}{2t_7^*} = \frac{t_7}{2.4} \quad (16)$$

又在曲线 $y(t^*)$ 上，令 $t^* = t_4^* = 0.4$ ，则由式(15)确定了 $y(t_4^*)$ 与 Δ 的关系。简单地记 $y(t_4^*) = y_4^*$ ，绘出 Δ^2 与 y_4^* 的关系曲线，在图上 y_4^* 处找到对应的 Δ^2 值。可得到近似的经验公式

$$y_4^* = 0.191 + (0.33 - 0.191)\Delta^2 \quad (17)$$

在 $y(t^*)$ 曲线上，找到 y_4^* 的值(也可在 $y(t)$ 曲线上，找到 $t_4 = 0.8T$ 对应的 y_4)。



一阶惯性滞后环节的辨识
二阶自衡对象的辨识
二阶欠阻尼自衡对象的...
高阶自衡对象的辨识
自衡等容对象的辨识
无自衡对象的传递函数...
面积法

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀](#) [▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 12 of 28

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



1. 若 $0.191 \leq y_4^* \leq 0.33$ 时，则可由式(17)解得 Δ ，从而得 T_1 和 T_2 。则传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} \quad (18)$$

实测曲线 $y(t)$ 与由 T_1 和 T_2 计算出来的结果应在 $t = t_7$ ， $t = t_4$ 处吻合。

一阶惯性滞后环节的辨识
二阶自衡对象的辨识
二阶欠阻尼自衡对象的...
高阶自衡对象的辨识
自衡等容对象的辨识
无自衡对象的传递函数...
面积法

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 13 of 28

Go Back

Full Screen

Close

Quit



1. 若 $0.191 \leq y_4^* \leq 0.33$ 时，则可由式(17)解得 Δ ，从而得 T_1 和 T_2 。则传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} \quad (18)$$

实测曲线 $y(t)$ 与由 T_1 和 T_2 计算出来的结果应在 $t = t_7$ ， $t = t_4$ 处吻合。

2. 若 $y_4^* < 0.191$ 时，应采用传递函数

$$G(s) = \frac{e^{-\tau s}}{(Ts + 1)^2} \quad (19)$$

来近似描述。在 $y(t) = 0.191$ 处找到对应时间 t_2 ，此时

$$\begin{cases} \tau = (3t_2 - t_7)/2 \\ T = (t_7 - \tau)/2.4 \end{cases} \quad (20)$$

实测曲线 $y(t)$ 与由 τ 和 T 计算出来的结果应该在 $y_0^* = 0, y_2^* = 0.191, y_7^* = 0.7$ 处重合。若实测曲线在 $t_8 = 1.6T + \tau$ 处， $y_8^* = 0.48$ ；在 $t_{20} = 4T + \tau$ 处， $y_{20}^* = 0.91$ ，误差不大则认为合格。

一阶惯性滞后环节的辨识
二阶自衡对象的辨识
二阶欠阻尼自衡对象的...
高阶自衡对象的辨识
自衡等容对象的辨识
无自衡对象的传递函数...
面积法

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 13 of 28

Go Back

Full Screen

Close

Quit



一阶惯性滞后环节的辨识
二阶自衡对象的辨识
二阶欠阻尼自衡对象的...
高阶自衡对象的辨识
自衡等容对象的辨识
无自衡对象的传递函数...
面积法

1. 若 $0.191 \leq y_4^* \leq 0.33$ 时，则可由式(17)解得 Δ ，从而得 T_1 和 T_2 。则传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} \quad (18)$$

实测曲线 $y(t)$ 与由 T_1 和 T_2 计算出来的结果应在 $t = t_7$ ， $t = t_4$ 处吻合。

2. 若 $y_4^* < 0.191$ 时，应采用传递函数

$$G(s) = \frac{e^{-\tau s}}{(Ts + 1)^2} \quad (19)$$

来近似描述。在 $y(t) = 0.191$ 处找到对应时间 t_2 ，此时

$$\begin{cases} \tau = (3t_2 - t_7)/2 \\ T = (t_7 - \tau)/2.4 \end{cases} \quad (20)$$

实测曲线 $y(t)$ 与由 τ 和 T 计算出来的结果应该在 $y_0^* = 0, y_2^* = 0.191, y_7^* = 0.7$ 处重合。若实测曲线在 $t_8 = 1.6T + \tau$ 处， $y_8^* = 0.48$ ；在 $t_{20} = 4T + \tau$ 处， $y_{20}^* = 0.91$ ，误差不大则认为合格。

3. 若 $y_4^* > 0.33$ 时，则应采用一阶惯性加滞后传递函数式(1)来描述。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 13 of 28

Go Back

Full Screen

Close

Quit



一阶惯性滞后环节的辨识
二阶自衡对象的辨识
二阶欠阻尼自衡对象的...
高阶自衡对象的辨识
自衡等容对象的辨识
无自衡对象的传递函数...
面积法

3 二阶欠阻尼自衡对象的辨识

对于具有传递函数

$$G(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (21)$$

的系统(ω_0 称为自然频率, ξ 为阻尼系数)。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 14 of 28

Go Back

Full Screen

Close

Quit



一阶惯性滞后环节的辨识
二阶自衡对象的辨识
二阶欠阻尼自衡对象的...
高阶自衡对象的辨识
自衡等容对象的辨识
无自衡对象的传递函数...
面积法

3 二阶欠阻尼自衡对象的辨识

对于具有传递函数

$$G(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0s + \omega_0^2} \quad (21)$$

的系统(ω_0 称为自然频率, ξ 为阻尼系数)。当 $\xi < 1$ 时, 称为欠阻尼系数。在阶跃输入激励下, 系统输出显现出明显的振荡现象。采用拉氏变换, 可知其无因次曲线为

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_0t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\sqrt{1-\xi^2}\omega_0t + \phi) \quad (22)$$

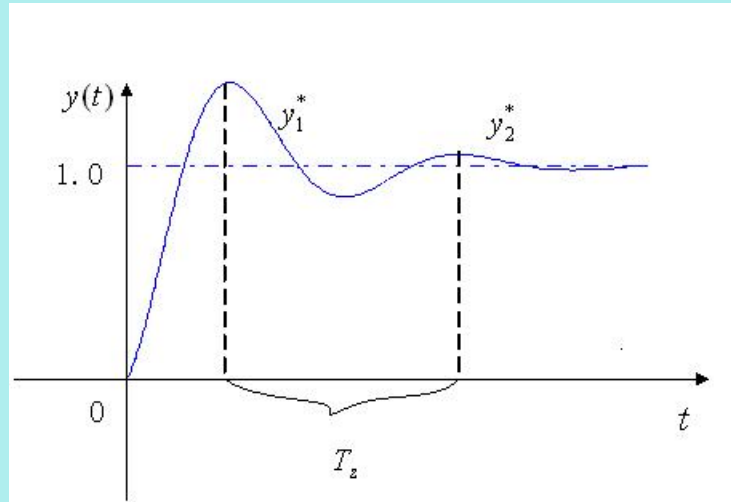
其中 $\tan \phi = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$ 。 Y_1^* 和 Y_2^* 分别是第一、二波峰相对于1的高度, 相隔时间为 T_z 。

$$Y_1^* = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}, \quad Y_2^* = e^{-3\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 14 of 28](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



一阶惯性滞后环节的辨识
二阶自衡对象的辨识
二阶欠阻尼自衡对象的...
高阶自衡对象的辨识
自衡等容对象的辨识
无自衡对象的传递函数...
面积法



由 Y_1^* 和 T_z 解得

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{1 + (\pi / \ln Y_1^*)^2}}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_z \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (23)$$

用 Y_2^* 作检验。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 15 of 28

Go Back

Full Screen

Close

Quit



一阶惯性滞后环节的辨识
二阶自衡对象的辨识
二阶欠阻尼自衡对象的...
高阶自衡对象的辨识
自衡等容对象的辨识
无自衡对象的传递函数...
面积法

4 高阶自衡对象的辨识

阶跃响应曲线的起始变化速度很慢时，都是二阶以上的过程。这里设三阶自衡对象传递函数的极点都是负实数，这时，无因次阶跃响应曲线为

$$y(t) = 1 + Ae^{-t/T_1} + Be^{-t/T_2} + Ce^{-t/T_3} \quad (24)$$

要辨识的参数有时间常数 T_1, T_2 和 T_3 ，系数 A, B 和 C 。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀▶](#)[◀▶](#)[Page 16 of 28](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



一阶惯性滞后环节的辨识
二阶自衡对象的辨识
二阶欠阻尼自衡对象的...
高阶自衡对象的辨识
自衡等容对象的辨识
无自衡对象的传递函数...
面积法

4 高阶自衡对象的辨识

阶跃响应曲线的起始变化速度很慢时，都是二阶以上的过程。这里设三阶自衡对象传递函数的极点都是负实数，这时，无因次阶跃响应曲线为

$$y(t) = 1 + Ae^{-t/T_1} + Be^{-t/T_2} + Ce^{-t/T_3} \quad (24)$$

要辨识的参数有时间常数 T_1, T_2 和 T_3 ，系数 A, B 和 C 。

假设 $T_1 \geq T_2 \geq T_3$ ，这时，当时间不断增大时，式(24)的后两项与 Ae^{-t/T_1} 相比可以忽略，即当 $t \rightarrow T_1$ 时，该式简化为 $y(t) \doteq 1 + Ae^{-t/T_1}$ 。
即

$$\ln |(y(t) - 1)| = \ln |A| - t/T_1 \quad (25)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 16 of 28](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



一阶惯性滞后环节的辨识
二阶自衡对象的辨识
二阶欠阻尼自衡对象的...
高阶自衡对象的辨识
自衡等容对象的辨识
无自衡对象的传递函数...
面积法

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 16 of 28

Go Back

Full Screen

Close

Quit

4 高阶自衡对象的辨识

阶跃响应曲线的起始变化速度很慢时，都是二阶以上的过程。这里设三阶自衡对象传递函数的极点都是负实数，这时，无因次阶跃响应曲线为

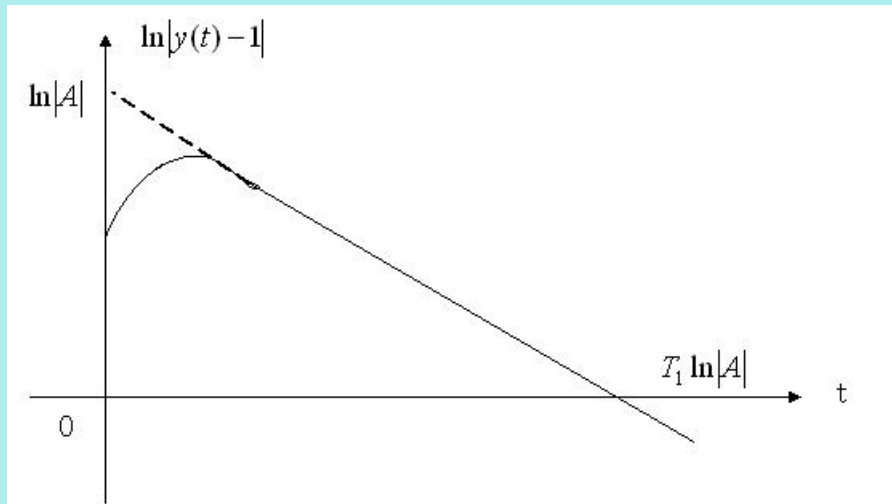
$$y(t) = 1 + Ae^{-t/T_1} + Be^{-t/T_2} + Ce^{-t/T_3} \quad (24)$$

要辨识的参数有时间常数 T_1, T_2 和 T_3 ，系数 A, B 和 C 。

假设 $T_1 \geq T_2 \geq T_3$ ，这时，当时间不断增大时，式(24)的后两项与 Ae^{-t/T_1} 相比可以忽略，即当 $t \rightarrow T_1$ 时，该式简化为 $y(t) \doteq 1 + Ae^{-t/T_1}$ 。
即

$$\ln |(y(t) - 1)| = \ln |A| - t/T_1 \quad (25)$$

将 $\ln |(y(t) - 1)|$ 的值绘于图上，横轴为时间 t ，即半对数坐标图。如图2.4所示， A 的符号与 $y(t) - 1$ 的符号相同，则 A, T_1 可以得到。



在得到 A 和 T_1 以后，当 $t \rightarrow T_2$ 时，不考虑式(24)中最后一项的作用，那么近似有 $y(t) \doteq 1 + Ae^{-t/T_1} + Be^{-t/T_2}$ 。即

$$\ln |(y(t) - 1 - Ae^{-t/T_1})| = \ln |B| - t/T_2 \quad (26)$$

采用上面同样的方法得到 $|B|$ 和 T_2 的值， B 的符号与 $y(t) - 1 - Ae^{-t/T_1}$ 相同。

一阶惯性滞后环节的辨识
二阶自衡对象的辨识
二阶欠阻尼自衡对象的...
高阶自衡对象的辨识
自衡等容对象的辨识
无自衡对象的传递函数...
面积法

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 17 of 28

Go Back

Full Screen

Close

Quit



一阶惯性滞后环节的辨识
二阶自衡对象的辨识
二阶欠阻尼自衡对象的 ...
高阶自衡对象的辨识
自衡等容对象的辨识
无自衡对象的传递函数 ...
面积法

同理得 C 和 T_3 的值。由此，可推广到 n 阶系统。但实际上，当 n 较高时，由于绘图精度的影响，后面的时间常数和系数准确性变差。

在得到阶跃响应曲线后，采用逆拉氏变换即得对象的传递函数

$$G(s) = K \left(\frac{A}{T_1 s + 1} + \frac{B}{T_2 s + 1} + \frac{C}{T_3 s + 1} \right) \quad (27)$$

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀](#) [▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 18 of 28

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



一阶惯性滞后环节的辨识
二阶自衡对象的辨识
二阶欠阻尼自衡对象的...
高阶自衡对象的辨识
自衡等容对象的辨识
无自衡对象的传递函数...
面积法

5 自衡等容对象的辨识

在实际系统中有这样的情形，即多个时间常数相同(或非常接近)的子环节串联在一起，组成式(4)所示的传递函数。传递函数式(4)的辨识也可分为切线法和二点法。

1. $n=2$ 的情形

若系统为二阶等容惯性对象， $G(s) = \frac{1}{(Ts+1)^2}$ ，则无因次的阶跃响应曲线为

$$y(t) = 1 - \left(1 + \frac{t}{T}\right) e^{-t/T} \quad (28)$$

其一阶、二阶导数分别为

$$y'(t) = \frac{t}{T^2} e^{-t/T} \quad (29)$$

$$y''(t) = \frac{1}{T^2} \left(1 - \frac{t}{T}\right) e^{-t/T} \quad (30)$$

由 $y''(t)_{t=t_1} = 0$ ，解得拐点为 $t_1 = T$ 。

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀](#) [▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 19 of 28

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



一阶惯性滞后环节的辨识
二阶自衡对象的辨识
二阶欠阻尼自衡对象的...
高阶自衡对象的辨识
自衡等容对象的辨识
无自衡对象的传递函数...
面积法

我们也可以把以上二阶传递函数用一阶惯性环节来近似，一阶等效传递函数为

$$G(s) = \frac{e^{-0.283Ts}}{2.717Ts + 1} \quad (31)$$

2. n=3的情形

对于三阶惯性环节 $G(s) = \frac{1}{(Ts+1)^3}$ ，其无因次阶跃响应曲线为

$$y(t) = 1 - \left[1 + \frac{t}{T} + \frac{1}{2} \left(\frac{t}{T} \right)^2 \right] e^{-t/T} \quad (32)$$

拐点为 $t_1 = 2T$ 。也可用一阶惯性环节来近似，

$$G(s) = \frac{e^{-0.805Ts}}{4.5Ts + 1} \quad (33)$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 20 of 28

Go Back

Full Screen

Close

Quit



一阶惯性滞后环节的辨识
二阶自衡对象的辨识
二阶欠阻尼自衡对象的...
高阶自衡对象的辨识
自衡等容对象的辨识
无自衡对象的传递函数...
面积法

3. 一般情形

为了避免切线法所带来的缺点，我们可以在无因次曲线上适当选择两个点，例如选取 $y(t_1) = 0.4$ ， $y(t_2) = 0.8$ 两点，测得 t_1 和 t_2 。

当 $t_1/t_2 = 0.32$ 时，为一阶惯性环节， $\tau = 0$ ，时间常数为

$$T = \frac{t_1 + t_2}{2.12} \quad (34)$$

当 $0.32 < t_1/t_2 < 0.46$ 时，采用式(2)描述更为精确，其中 T_1 和 T_2 的值为

$$\begin{cases} T_1 = \frac{t_1 + t_2}{2.16} \\ T_2 = \frac{1.74t_1/t_2 - 0.55}{T_1} \end{cases} \quad (35)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)

Page 21 of 28

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



一阶惯性滞后环节的辨识
二阶自衡对象的辨识
二阶欠阻尼自衡对象的...
高阶自衡对象的辨识
自衡等容对象的辨识
无自衡对象的传递函数...
面积法

当 $t_1/t_2 = 0.46$ 时，为二阶等容对象，时间常数为

$$T_1 = \frac{t_1 + t_2}{4.36} \quad (36)$$

当 $t_1/t_2 > 0.46$ 时，采用 $n > 2$ 的等容对象描述。有经验公式

$$\sqrt{n} = 1.075t_1/(t_2 - t_1) + 0.5 \quad (37)$$

取 $[n]$ ，误差 $< \pm 0.1\%$ 。而 $T = \frac{t_1+t_2}{2.16n}$ ， $n = 1 \sim 16$ ，误差 $< \pm 2\%$ 。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 22 of 28

Go Back

Full Screen

Close

Quit



一阶惯性滞后环节的辨识
二阶自衡对象的辨识
二阶欠阻尼自衡对象的...
高阶自衡对象的辨识
自衡等容对象的辨识
无自衡对象的传递函数...
面积法

6 无自衡对象的传递函数辨识

对于传递函数式(5)描述的对象，由 $\dot{y}(t)$ 曲线，即冲激响应曲线辨识得到 $G_0(s)$ ，则系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{s}G_0(s) \quad (38)$$

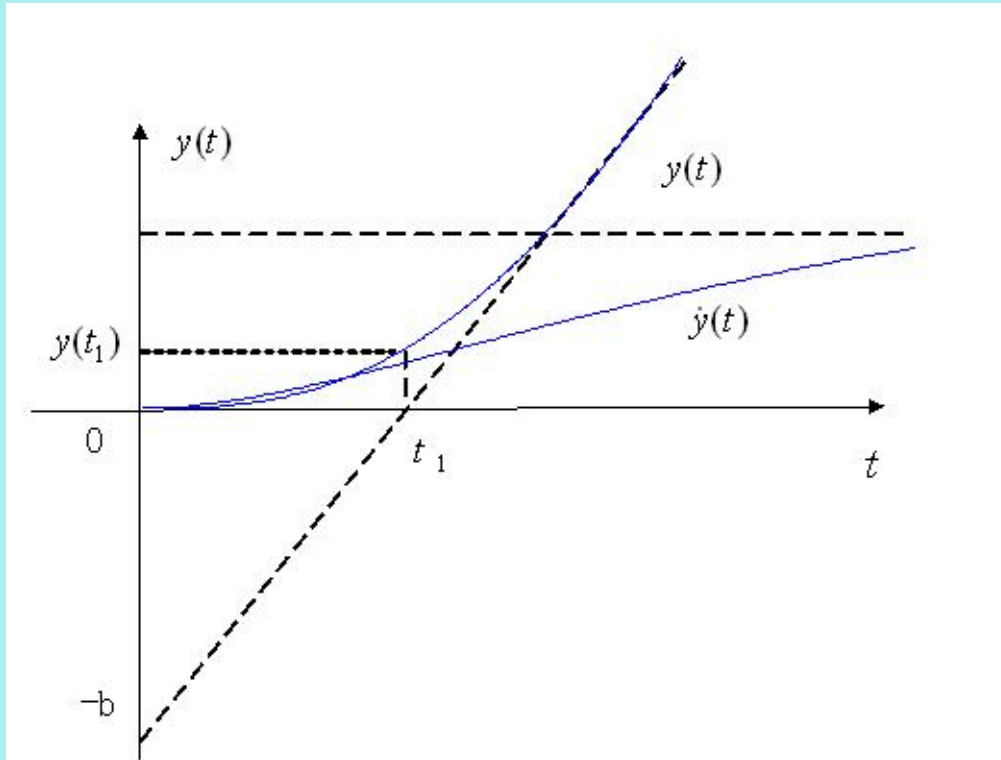
时滞 τ ，放大系数 K 可直接得到。

如果冲激响应曲线得不到，采用上述传递函数描述系统，只需要对 T 和 n 进行辨识。如图2.6所示，在实际曲线 $y(t)$ 上测出 $y(t_1)$ 的值，利用 n 与 $y(t_1)/b$ 的关系，如表2.1所示，直接得到阶数 n 的值。

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 23 of 28](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



一阶惯性滞后环节的辨识
二阶自衡对象的辨识
二阶欠阻尼自衡对象的...
高阶自衡对象的辨识
自衡等容对象的辨识
无自衡对象的传递函数...
面积法



[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀](#) [▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 24 of 28

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



一阶惯性滞后环节的辨识
二阶自衡对象的辨识
二阶欠阻尼自衡对象的...
高阶自衡对象的辨识
自衡等容对象的辨识
无自衡对象的传递函数...
面积法

表2.1 系统阶数 n 与 $y(t_1)/b$ 的关系

n	1	2	3	4	5	6
$\frac{y(t_1)}{b}$	0.368	0.271	0.224	0.195	0.175	0.161

也可以由经验公式

$$n = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{b}{y(t_1)} \right]^2 - \frac{1}{6} \quad (39)$$

得到阶数 n 的值，时间常数由 t_1 和 n 求得，为 $T = t_1/n$ 。

若求出 n 的过大，如 $n > 6$ ，即当 $y(t_1)/b < 0.161$ 时，可以用一阶惯性滞后环节来近似($n = 1, T = t_1$)。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 25 of 28

Go Back

Full Screen

Close

Quit



一阶惯性滞后环节的辨识
二阶自衡对象的辨识
二阶欠阻尼自衡对象的...
高阶自衡对象的辨识
自衡等容对象的辨识
无自衡对象的传递函数...
面积法

7 面积法

考虑系统的传递函数如下

$$G(s) = \frac{1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + 1} \quad (40)$$

系统的传递函数与微分方程存在着一一对应的关系，因此，可以通过求取微分方程的系数来辨识系统的传递函数。

[Home Page](#)[Title Page](#)[<<](#)[>>](#)[<](#)[>](#)

Page 26 of 28

[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)



一阶惯性滞后环节的辨识
二阶自衡对象的辨识
二阶欠阻尼自衡对象的...
高阶自衡对象的辨识
自衡等容对象的辨识
无自衡对象的传递函数...
面积法

7 面积法

考虑系统的传递函数如下

$$G(s) = \frac{1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + 1} \quad (40)$$

系统的传递函数与微分方程存在着一一对应的关系，因此，可以通过求取微分方程的系数来辨识系统的传递函数。在求得系统的放大倍数 K 以后，我们要得到无因次阶跃响应 $y(t)$ (设 $\tau = 0$)。大多数自衡的工业控制对象的 $y(t)$ 可以用下式描述来近似

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 1 \quad (41)$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 26 of 28

Go Back

Full Screen

Close

Quit



一阶惯性滞后环节的辨识
二阶自衡对象的辨识
二阶欠阻尼自衡对象的...
高阶自衡对象的辨识
自衡等容对象的辨识
无自衡对象的传递函数...
面积法

7 面积法

考虑系统的传递函数如下

$$G(s) = \frac{1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + 1} \quad (40)$$

系统的传递函数与微分方程存在着——对应的关系，因此，可以通过求取微分方程的系数来辨识系统的传递函数。在求得系统的放大倍数 K 以后，我们要得到无因次阶跃响应 $y(t)$ (设 $\tau = 0$)。大多数自衡的工业控制对象的 $y(t)$ 可以用下式描述来近似

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 1 \quad (41)$$

面积法原则上可求出 n 为任意阶的各系数，以 $n = 3$ 为例，注意到

$$\frac{d^3 y(t)}{dt} \Big|_{t \rightarrow \infty} = \frac{d^2 y(t)}{dt} \Big|_{t \rightarrow \infty} = \frac{dy(t)}{dt} \Big|_{t \rightarrow \infty} = 0, y(t) \Big|_{t \rightarrow \infty} = 1 \quad (42)$$

[Home Page](#)[Title Page](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)[Page 26 of 28](#)[Go Back](#)[Full Screen](#)[Close](#)[Quit](#)

将式(41)的 $y(t)$ 项移至右边，在 $[0, t]$ 上积分，得

$$a_3 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_2 \frac{dy(t)}{dt} + a_1 y(t) = \int_0^t [1 - y(t)] dt \quad (43)$$



一阶惯性滞后环节的辨识
二阶自衡对象的辨识
二阶欠阻尼自衡对象的...
高阶自衡对象的辨识
自衡等容对象的辨识
无自衡对象的传递函数...
面积法

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 27 of 28

Go Back

Full Screen

Close

Quit



一阶惯性滞后环节的辨识
二阶自衡对象的辨识
二阶欠阻尼自衡对象的...
高阶自衡对象的辨识
自衡等容对象的辨识
无自衡对象的传递函数...
面积法

将式(41)的 $y(t)$ 项移至右边，在 $[0, t]$ 上积分，得

$$a_3 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_2 \frac{dy(t)}{dt} + a_1 y(t) = \int_0^t [1 - y(t)] dt \quad (43)$$

定义

$$F_1(t) = \int_0^t [1 - y(t)] dt \quad (44)$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 27 of 28

Go Back

Full Screen

Close

Quit



一阶惯性滞后环节的辨识
二阶自衡对象的辨识
二阶欠阻尼自衡对象的...
高阶自衡对象的辨识
自衡等容对象的辨识
无自衡对象的传递函数...
面积法

将式(41)的 $y(t)$ 项移至右边, 在 $[0, t]$ 上积分, 得

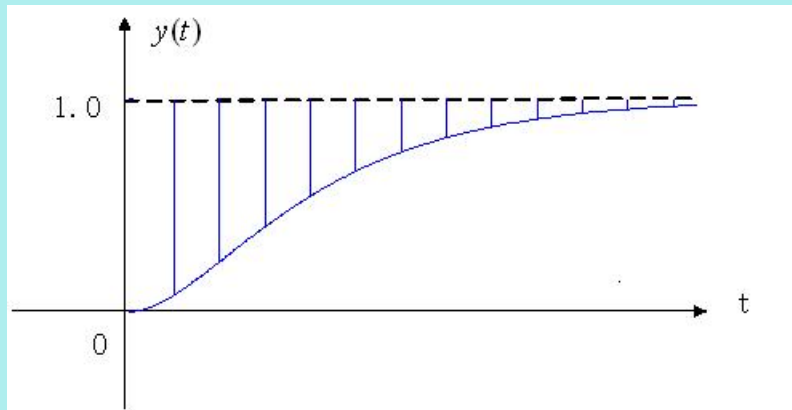
$$a_3 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_2 \frac{dy(t)}{dt} + a_1 y(t) = \int_0^t [1 - y(t)] dt \quad (43)$$

定义

$$F_1(t) = \int_0^t [1 - y(t)] dt \quad (44)$$

则由式(42)给出的初、终值条件可知, 当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$a_1 = \int_0^\infty [1 - y(t)] dt \quad (45)$$



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 27 of 28

Go Back

Full Screen

Close

Quit



一阶惯性滞后环节的辨识
二阶自衡对象的辨识
二阶欠阻尼自衡对象的...
高阶自衡对象的辨识
自衡等容对象的辨识
无自衡对象的传递函数...
面积法

如图所示, a_1 的数值相当于图中的阴影部分的面积。
将式 $a_1 y(t)$ 移到右边, 定义

$$a_3 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 y(t) = \int_0^t [F_1(t) - a_1 y(t)] dt = F_2(t) \quad (46)$$

利用式(42)得, 当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$a_2 = F_2(\infty) \quad (47)$$

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀ ▶

◀ ▶

Page 28 of 28

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



一阶惯性滞后环节的辨识
二阶自衡对象的辨识
二阶欠阻尼自衡对象的...
高阶自衡对象的辨识
自衡等容对象的辨识
无自衡对象的传递函数...
面积法

如图所示, a_1 的数值相当于图中的阴影部分的面积。
将式 $a_1 y(t)$ 移到右边, 定义

$$a_3 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 y(t) = \int_0^t [F_1(t) - a_1 y(t)] dt = F_2(t) \quad (46)$$

利用式(42)得, 当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$a_2 = F_2(\infty) \quad (47)$$

同样地, 可定义 $a_3 y(t) = \int_0^t [F_2(t) - a_2 y(t)] dt = F_3(t)$, 得 $a_3 = F_3(\infty)$ 。依次类推, 若 $n \geq 2$, 定义

$$F_n(t) = \int_0^t [F_{n-1}(t) - a_{n-1} y(t)] dt \quad (48)$$

得到

$$a_n = F_n(\infty) \quad (49)$$

面积法的优点是充分利用了阶跃响应的每一点信息, 因而具有很强的滤波功能。

Home Page

Title Page



Page 28 of 28

Go Back

Full Screen

Close

Quit